

Sistemi dinamici discreti olomorfi locali

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa
E-mail: abate@dm.unipi.it

Maggio 2007

0. Introduzione

Negli ultimi trent'anni la teoria dei sistemi dinamici, in tutte le sue mille sfaccettature, è diventata uno dei campi di punta della matematica contemporanea, con numerose applicazioni, matematiche e non. Uno dei motivi per cui i sistemi dinamici hanno suscitato tanto interesse è che formano un tipico campo di frontiera, ove vengono utilizzate tecniche prese a prestito (e a volte restituite migliorate) da tutta la matematica: dalla teoria dei numeri alla teoria della misura, dalla geometria differenziale alla geometria degli spazi di Banach, dalle equazioni differenziali ordinarie alle equazioni coomologiche, e così via. I problemi affrontati nella teoria dei sistemi dinamici sono spesso semplici da spiegare, e di interesse evidente; le soluzioni trovate sono spesso profonde e complesse, con enunciati eleganti e dimostrazioni lunghe decine e decine di pagine.

Una situazione ideale per lavorarci, molto meno per scrivere un articolo di rassegna. L'ottima "Introduzione alla teoria moderna dei sistemi dinamici" di Katok e Hasselblatt [HK] consta di più di 800 pagine — scritte con uno stile conciso e saltando diversi argomenti pure importanti. L'unica via possibile per rimanere all'interno di un numero ragionevole di pagine consiste nello scegliere un aspetto particolare dell'intera teoria e concentrarsi su quello, sperando che il processo metonimico funzioni abbastanza da fornire una sia pur vaga idea dell'argomento nel suo complesso.

All'interno della teoria dei sistemi dinamici ci sono delle suddivisioni naturali, che suggeriscono possibili scelte di argomenti. La prima dicotomia importante è *discreto/continuo*. Un sistema dinamico è (in parole molto povere) un sistema che varia nel tempo secondo una legge ben definita. Se permettiamo al sistema di evolvere solo in istanti temporali discreti, per cui la legge di evoluzione è rappresentata da una funzione iterata a intervalli regolari, si parla di *sistema dinamico discreto*; se invece il sistema si evolve senza soluzione di continuità, per cui la legge di evoluzione è (usualmente) rappresentata da un'equazione differenziale ordinaria (ovvero da un campo vettoriale), si parla di *sistema dinamico continuo*.

La teoria dei sistemi dinamici, sia discreti sia continui, si occupa quindi di oggetti ben noti e studiati anche precedentemente; funzioni di varia regolarità in un caso, equazioni differenziali nell'altro. Quello che (come vedremo) contraddistingue i sistemi dinamici da altre teorie matematiche non sono gli oggetti di studio ma il *tipo di domande* che ci si pone. Per esempio, non ci interessa sapere se un certo tipo di equazione differenziale ha o meno soluzione; ci interessa studiare l'evoluzione *qualitativa nel tempo* (il comportamento asintotico) delle soluzioni.

Vale la pena osservare che la dicotomia discreto/continuo (come altre dicotomie che incontreremo) non è rigida. Esistono tecniche standard per associare un sistema dinamico discreto a uno continuo, e viceversa; e non è raro che i risultati ottenuti in un settore abbiano analogie/applicazioni/ispirazioni nell'altro.

Un'altra dicotomia importante è quella *locale/globale*. Il comportamento dinamico più semplice possibile è quello in cui non si muove nulla: un punto fisso di una funzione nel caso discreto, uno zero di un campo vettoriale nel caso continuo. La dinamica locale si occupa di studiare cosa succede vicino a questi punti; la dinamica globale si occupa invece di studiare il comportamento asintotico su tutta la varietà in cui è definito il sistema dinamico. Di nuovo, è chiaro che lo studio locale influenza la dinamica globale; viceversa, a volte capita che per risolvere questioni locali sia necessario utilizzare tecniche di natura più globale.

Una terza dicotomia che, anche se più tecnica, è importante citare è quella *iperbolico/non iperbolico*. Detto in modo grossolano, i sistemi dinamici iperbolici posseggono delle direzioni privilegiate in cui la dinamica è particolarmente semplice (le orbite sono attratte o respinte da specifici sottoinsiemi) ma sufficientemente pervasiva da fungere da punto di partenza per uno studio approfondito della dinamica in tutto lo spazio. Anche se il sogno di Smale (che i sistemi dinamici iperbolici fossero densi rispetto a un'opportuna topologia nell'insieme di tutti i sistemi dinamici sufficientemente regolari) si è rivelato troppo ottimista, i

sistemi dinamici iperbolici rimangono estremamente importanti, diffusi e studiati; e in certi contesti il sogno di Smale si è avverato (per esempio proprio nella classe dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali). D'altra parte, come vedremo anche in questo articolo, il comportamento dinamico dei sistemi dinamici non iperbolici, proprio perché meno regolare di quello dei sistemi iperbolici, presenta caratteristiche alquanto interessanti e complesse, che richiedono l'uso di tecniche nuove e sofisticate.

Infine, un'ulteriore suddivisione naturale è causata dal grado di regolarità del sistema dinamico che si studia: di classe C^∞ o solo misurabile, olomorfo o analitico reale o solo continuo, e così via. Molto spesso, le domande nei vari casi sono le stesse; le risposte invece possono cambiare radicalmente.

In questo articolo cercherò di dare un'idea dello stato attuale della teoria dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali in una variabile complessa. Nata più o meno contemporaneamente al resto della teoria dei sistemi dinamici (il primo risultato di una certa importanza, il teorema di Koenigs, è del 1884, il famoso articolo di Poincaré sulla dinamica del sistema dei tre corpi è del 1890), si è sviluppata parallelamente al resto della teoria dei sistemi dinamici olomorfi discreti. In particolare, i principali risultati in una variabile sono quelli ottenuti da Fatou, Julia e altri negli anni '20, e quelli ottenuti da Écalle, Yoccoz e altri negli anni '80; vedremo anche che rimangono tuttora aperti alcuni problemi importanti. Trattandosi di un articolo introduttivo, non affronteremo invece la teoria dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali in più variabili complesse, nata essenzialmente negli anni '80 con i lavori di Écalle, e tutt'ora in pieno sviluppo (si veda, per esempio, [A2]).

La Sezione 1 di questo articolo descrive con precisione gli oggetti studiati dalla dinamica olomorfa locale discreta, e le domande che ci poniamo su di essi. La Sezione 2 è dedicata ai sistemi dinamici olomorfi discreti locali iperbolici; invece, le Sezioni 3 e 4 sono dedicate al caso non iperbolico, e la Sezione 5 contiene alcuni brevi commenti conclusivi.

Infine, ringrazio con piacere Mohamad Pouryaeyvali, François Berteloot, Vincent Guedj e Giorgio Patrizio, che in tempi e modi diversi hanno contribuito in maniera sostanziale alla nascita di questo articolo.

1. Le domande fondamentali

Sia M una varietà complessa, e $p \in M$. In questo articolo, un *sistema dinamico (discreto) olomorfo locale* in p è un'applicazione olomorfa $f: U \rightarrow M$ tale che $f(p) = p$, dove $U \subseteq M$ è un intorno aperto di p ; supporremo sempre che f non sia l'identità di M . Indicheremo con $\text{End}(M, p)$ l'insieme dei sistemi dinamici olomorfi discreti locali in p dentro M . Siccome siamo principalmente interessati al comportamento di f vicino a p , sostituiremo spesso f con una sua restrizione a un opportuno intorno aperto di p . Si potrebbe formalizzare questa operazione usando germi di applicazioni e di germi di insiemi in p , ma per i nostri scopi sarà sufficiente usare un approccio meno formale.

Per parlare della dinamica di una $f \in \text{End}(M, p)$ abbiamo bisogno delle iterate di f . Se f è definita nell'insieme U , l'iterata seconda $f^2 = f \circ f$ è allora definita solo in $U \cap f^{-1}(U)$, che è ancora un intorno aperto di p . In generale, l'iterata k -esima $f^k = f \circ f^{k-1}$ è definita in $U \cap f^{-1}(U) \cap \dots \cap f^{-(k-1)}(U)$. È quindi naturale introdurre l'*insieme stabile* K_f di f definito da

$$K_f = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U).$$

Chiaramente, $p \in K_f$, per cui l'insieme stabile non è mai vuoto (ma può succedere che $K_f = \{p\}$; vedremo un esempio nella prossima sezione). L'insieme stabile di f è l'insieme di tutti i punti $z \in U$ per cui l'*orbita* $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$ è ben definita. Se $z \in U \setminus K_f$, diremo che z (o la sua orbita) *evade* da U .

Siamo giunti al primo problema naturale della dinamica olomorfa locale:

(P1) *Descrivere la struttura topologica di K_f .*

Per esempio, può succedere che K_f abbia parte interna non vuota? Come vedremo nella Sezione 4, i sistemi dinamici olomorfi locali per cui p appartiene alla parte interna dell'insieme stabile hanno proprietà speciali.

Vale la pena notare che sia la definizione di insieme stabile sia il Problema 1 (sia diverse altre definizioni e/o problemi che vedremo in seguito) hanno una natura topologica; hanno senso anche per sistemi dinamici locali che siano semplicemente continui. Vedremo però che le *risposte* a questi problemi dipendono fortemente dall'olomorfia del sistema dinamico.

L'insieme stabile K_f è evidentemente *completamente f -invariante*, cioè $f^{-1}(K_f) = K_f$ (per cui, in particolare, è anche *f -invariante*, nel senso che $f(K_f) \subseteq K_f$). Quindi la coppia (K_f, f) è un sistema dinamico discreto globale (cioè f è un'applicazione di K_f in sé, in generale solo continua), e il secondo problema naturale della dinamica olomorfa locale è

(P2) *Descrivere la struttura dinamica di (K_f, f) .*

Per esempio, qual è il comportamento asintotico delle orbite? Convergono a p , o hanno un carattere caotico? Ci sono orbite dense? Esistono dei sottoinsiemi propri f -invarianti, cioè dei sottoinsiemi $L \subset K_f$ tali che $f(L) \subseteq L$? Se esistono, qual è la dinamica su di loro?

Per rispondere a tutte queste domande, la tecnica più efficiente è rimpiazzare f con un sistema dinamico discreto g “dinamicamente equivalente” e più semplice (per esempio, lineare). Nel nostro contesto, “dinamicamente equivalente” significa “localmente coniugato”; e dobbiamo considerare almeno tre tipi diversi di coniugazione.

Siano $f_1: U_1 \rightarrow M_1$ e $f_2: U_2 \rightarrow M_2$ due sistemi dinamici olomorfi locali in $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$ rispettivamente. Diremo che f_1 e f_2 sono *olomorficamente* (rispettivamente, *topologicamente*) *localmente coniugati* se esistono intorno aperti $W_1 \subseteq U_1$ di p_1 , $W_2 \subseteq U_2$ di p_2 , e un biolomorfismo (rispettivamente, un omeomorfismo) $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$ con $\varphi(p_1) = p_2$ tali che

$$f_1 = \varphi^{-1} \circ f_2 \circ \varphi \quad \text{su} \quad \varphi^{-1}(W_2 \cap f_2^{-1}(W_2)) = W_1 \cap f_1^{-1}(W_1).$$

In particolare abbiamo

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f_1^k = \varphi^{-1} \circ f_2^k \circ \varphi \quad \text{su} \quad \varphi^{-1}(W_2 \cap \dots \cap f_2^{-(k-1)}(W_2)) = W_1 \cap \dots \cap f_1^{-(k-1)}(W_1),$$

per cui $K_{f_2|_{W_2}} = \varphi(K_{f_1|_{W_1}})$. Quindi la dinamica locale di f_1 vicino a p_1 è a tutti gli effetti equivalente alla dinamica locale di f_2 vicino a p_2 .

Usando coordinate locali centrate in $p \in M$ si vede facilmente che ogni sistema dinamico olomorfo locale in p è olomorficamente localmente coniugato a un sistema dinamico olomorfo locale in $O \in \mathbb{C}^n$, dove $n = \dim M$. Quindi senza perdita di generalità potremo limitarci a studiare la dinamica degli elementi di $\text{End}(\mathbb{C}^n, O)$.

Ogni volta che si definisce una relazione d'equivalenza su una classe d'oggetti, si pone il problema della classificazione. Quindi il terzo problema naturale della dinamica olomorfa locale è

(P3) *Trovare una classe \mathcal{F} (possibilmente piccola) di sistemi dinamici olomorfi locali in $O \in \mathbb{C}^n$ tale che ogni sistema dinamico olomorfo locale f in un punto di una varietà complessa n -dimensionale sia olomorficamente (rispettivamente, topologicamente) localmente coniugato a un (possibilmente) unico elemento di \mathcal{F} , detto forma normale olomorfa (rispettivamente, forma normale topologica) di f .*

Sfortunatamente, la classificazione olomorfa è spesso troppo complessa per essere utile; la famiglia \mathcal{F} delle forme normali olomorfe potrebbe avere cardinalità più che numerabile. Una via alternativa consiste nel cercare, invece di forme normali, degli invarianti:

(P4) *Trovare un modo per associare a ciascun sistema dinamico olomorfo locale $f \in \text{End}(\mathbb{C}^n, O)$ una (possibilmente piccola) classe di oggetti (possibilmente esplicitamente calcolabili), detti invarianti, in modo che due sistemi dinamici olomorfi locali in O che siano olomorficamente (o topologicamente) localmente coniugati abbiano gli stessi invarianti. La classe di invarianti sarà detta completa se inoltre due sistemi dinamici olomorfi locali con gli stessi invarianti sono necessariamente olomorficamente (o topologicamente) localmente coniugati.*

Come notato prima, tutti i problemi che ci siamo posti finora hanno senso anche per sistemi dinamici locali che siano semplicemente continui; il prossimo problema invece ha senso solo per sistemi dinamici olomorfi.

Un sistema dinamico olomorfo locale in $O \in \mathbb{C}^n$ è dato da un elemento di $\mathbb{C}_0\{z_1, \dots, z_n\}^n$, lo spazio delle n -uple di serie di potenze convergenti in z_1, \dots, z_n senza termine costante. Lo spazio $\mathbb{C}_0\{z_1, \dots, z_n\}^n$ è un sottospazio dello spazio $\mathbb{C}_0[[z_1, \dots, z_n]]^n$ delle n -uple di serie di potenze formali senza termine costante. Un elemento $\Phi \in \mathbb{C}_0[[z_1, \dots, z_n]]^n$ ha un inverso (rispetto alla composizione) che appartiene ancora a $\mathbb{C}_0[[z_1, \dots, z_n]]^n$ se e solo se il suo termine lineare è un automorfismo lineare di \mathbb{C}^n . Diremo che due sistemi dinamici olomorfi locali $f_1, f_2 \in \mathbb{C}_0\{z_1, \dots, z_n\}^n$ sono *formalmente coniugati* se esiste una $\Phi \in \mathbb{C}_0[[z_1, \dots, z_n]]^n$ invertibile tale che $f_1 = \Phi^{-1} \circ f_2 \circ \Phi$ in $\mathbb{C}_0[[z_1, \dots, z_n]]^n$.

È chiaro che due sistemi dinamici olomorfi locali che siano olomorficamente localmente coniugati sono anche topologicamente localmente coniugati e formalmente coniugati. Il viceversa non è affatto vero, invece. Vedremo esempi di sistemi dinamici olomorfi locali che sono topologicamente localmente coniugati senza esserlo né olomorficamente localmente né formalmente; ed esempi di sistemi dinamici olomorfi locali che sono formalmente coniugati senza esserlo né olomorficamente localmente né topologicamente localmente. Quindi l'ultimo problema naturale della dinamica olomorfa locale che studieremo è

(P5) *Trovare invarianti e forme normali rispetto alla relazione di coniugazione formale per sistemi dinamici olomorfi locali.*

L'obiettivo di questo articolo è presentare alcuni dei risultati principali noti su questi problemi, nel caso importante e rappresentativo di una variabile complessa.

2. Il caso iperbolico

Come notato nella sezione precedente, un sistema dinamico olomorfo locale in $0 \in \mathbb{C}$ è dato da una serie di potenze convergente f senza termine costante:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathbb{C}_0\{z\}. \quad (2.1)$$

Il numero $a_1 = f'(0)$ è usualmente detto *moltiplicatore* di f nell'origine. Come dominio di definizione di f possiamo prendere un qualsiasi disco U centrato nell'origine di raggio minore o uguale al raggio di convergenza di f ; siccome siamo interessati solo a ciò che succede vicino all'origine, se per assicurarci che f goda di qualche proprietà utile nel suo dominio sarà necessario rimpicciolire U , lo faremo senza alcuno scrupolo.

L'Analisi ci insegna che per $|z|$ molto piccolo il comportamento di f è simile al comportamento di $a_1 z$, la migliore approssimazione lineare di f ; è quindi ragionevole aspettarsi che la dinamica locale di f dipenda fortemente dal valore di a_1 . Tra l'altro, notiamo fin da subito che il moltiplicatore è un invariante olomorfo e formale (ma non topologico): infatti $(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)'(0) = f'(0)$ per ogni biolomorfismo locale (o isomorfismo formale) φ . Come vedremo, nel caso iperbolico a_1 è l'*unico* invariante olomorfo e formale di f ; la dinamica locale è completamente determinata dal moltiplicatore.

Visto che il comportamento dinamico dipenderà dal moltiplicatore, introduciamo le definizioni seguenti (compresa la definizione ufficiale di "iperbolico" per sistemi dinamici locali unidimensionali):

- se $|a_1| < 1$ diremo che il punto fisso 0 è *attrattivo*;
- se $a_1 = 0$ diremo che il punto fisso 0 è *superattrattivo*;
- se $|a_1| > 1$ diremo che il punto fisso 0 è *repulsivo*;
- se $|a_1| \neq 0, 1$ diremo che il punto fisso 0 è *iperbolico*;
- se $a_1 \in S^1$ è una radice dell'unità, diremo che il punto fisso 0 è *parabolico* (o *razionalmente indifferente*);
- se $a_1 \in S^1$ non è una radice dell'unità, diremo che il punto fisso 0 è *ellittico* (o *irrazionalmente indifferente*).

Dunque in questo contesto "iperbolico" vuol dire "attrattivo o repulsivo"; cominciamo allora a studiarne la dinamica, che è piuttosto semplice (e giustificherà l'uso di questi termini).

Prima di tutto, notiamo che se $a_1 \neq 0$ allora il sistema dinamico locale f è *invertibile*, nel senso che la funzione inversa $f^{-1} \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ è definita in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine. Chiaramente, il moltiplicatore di f^{-1} è il reciproco del moltiplicatore di f ; in particolare, 0 è repulsivo per f se e solo se è attrattivo per f^{-1} . Quindi spesso basterà studiare il caso attrattivo per dedurre informazioni anche sul caso repulsivo.

Supponiamo allora che 0 sia attrattivo per $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$. Dunque possiamo scrivere $f(z) = a_1 z + O(z^2)$, con $0 < |a_1| < 1$; quindi possiamo trovare una costante grande $M > 0$, una costante piccola $\varepsilon > 0$ e un numero $0 < \delta < 1$ tali che $|z| < \varepsilon$ implichi

$$|f(z)| \leq (|a_1| + M\varepsilon)|z| \leq \delta|z| < |z|. \quad (2.2)$$

In particolare, se restringiamo il dominio di f a un disco Δ_ε di centro 0 e raggio ε , abbiamo $f(\Delta_\varepsilon) \subset \Delta_\varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, e l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\varepsilon}$ è tutto Δ_ε (in particolare, un punto fisso attrattivo unidimensionale è sempre contenuto nella parte interna dell'insieme stabile). Inoltre,

$$|f^k(z)| \leq \delta^k |z| \rightarrow 0$$

per $k \rightarrow +\infty$, e dunque ogni orbita che parte in Δ_ε converge verso l'origine (che è il motivo del nome "attrattivo" per questo tipo di punti fissi).

In questo modo abbiamo completamente risposto alle domande (P1) e (P2) in questo caso: *l'insieme stabile di un punto fisso attrattivo coincide con l'intero intorno di definizione (preso abbastanza piccolo), e tutte le orbite sono attratte dal punto fisso.*

Se invece 0 è un punto fisso repulsivo, un ragionamento analogo (o l'osservazione che 0 è attrattivo per f^{-1}) mostra che per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\varepsilon}$ si riduce alla sola origine: *l'insieme stabile di un punto fisso repulsivo si riduce al solo punto fisso, e tutte le orbite (non banali) evadono.*

Più in generale, un sistema dinamico discreto olomorfo locale $F \in \text{End}(\mathbb{C}^n, O)$ con $n > 1$ è *iperbolico* se tutti gli autovalori del differenziale dF_O hanno modulo diverso da 0 e 1, che è chiaramente una condizione densa in $\text{End}(\mathbb{C}^n, O)$. Uno dei teoremi principali della teoria, il *Teorema della varietà stabile*, (si veda, per esempio, [HK]) assicura che l'insieme stabile di F è una varietà liscia (detta *varietà stabile*), tangente nell'origine alle direzioni corrispondenti agli autovalori di modulo minore di 1, e composta dai punti la cui orbita è attratta dall'origine. Analogamente, anche l'insieme stabile di F^{-1} è una varietà liscia (detta *varietà instabile*), tangente nell'origine alle direzioni corrispondenti agli autovalori di dF_O di modulo maggiore di 1, e composta dai punti la cui orbita inversa (cioè l'orbita rispetto a F^{-1}) è attratta dall'origine (mentre l'orbita rispetto a F evade). I punti che non appartengono né alla varietà stabile né a quella instabile hanno orbite che evadono sia rispetto a F che rispetto a F^{-1} , procedendo approssimativamente lungo iperboli — giustificando il nome "iperbolico" usato per descrivere questa situazione. Il teorema della varietà stabile è un risultato tipicamente locale; seguire il comportamento delle varietà stabili e instabili in grande è però uno degli strumenti più potenti per lo studio della dinamica globale (si veda, di nuovo, [HK], o [BS] per un esempio di applicazione nel caso olomorfo).

Torniamo alla dimensione 1, affrontando i problemi (P3), (P4) e (P5) per un punto fisso attrattivo. Non è difficile vedere che la (2.2) implica anche che la successione f^k/a_1^k converge uniformemente sui compatti di Δ_ε a una funzione olomorfa $\varphi: \Delta_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ con $\varphi'(0) = 1$. In particolare, φ è un biolomorfismo in un intorno dell'origine. Inoltre,

$$\varphi \circ f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^{k+1}}{a_1^k} = a_1 \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^{k+1}}{a_1^{k+1}} = a_1 \varphi,$$

per cui φ è una coniugazione olomorfa locale fra f e l'applicazione lineare $g(z) = a_1 z$.

Quindi la dinamica locale vicino a un punto fisso attrattivo è completamente determinata dal moltiplicatore, che abbiamo anche già visto essere un invariante olomorfo (e, in particolare, due sistemi dinamici con moltiplicatore diverso *non* possono essere olomorficamente localmente coniugati). In particolare, se $a_1 \in (0, 1)$ è reale allora le orbite convergono all'origine lungo direzioni reali ben precise; invece se a_1 non è reale le orbite convergono all'origine lungo spirali.

Quest'ultima distinzione si perde se consideriamo la coniugazione topologica. Infatti, è facile dimostrare che per ogni $0 < |a_1| < 1$ la funzione $g(z) = a_1 z$ è topologicamente localmente coniugata alla funzione $g_a(z) = z/2$: *tutti i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con punto fisso attrattivo sono topologicamente localmente coniugati fra loro.*

Ragionamenti analoghi si applicano al caso repulsivo. Abbiamo quindi sostanzialmente dimostrato il seguente risultato, che segnò l'inizio della teoria dei sistemi dinamici olomorfi:

Teorema 2.1: (Kœnigs, 1884 [Kœ]) *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale con un punto fisso iperbolico nell'origine di moltiplicatore $a_1 \in \mathbb{C}^* \setminus S^1$. Allora:*

- (i) *f è olomorficamente localmente (e quindi formalmente) coniugato alla sua parte lineare $g(z) = a_1 z$.*
- (ii) *Il moltiplicatore è un sistema completo di invarianti per la coniugazione olomorfa locale (o formale) di sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso iperbolico.*
- (iii) *f è topologicamente localmente coniugato a $g_a(z) = z/2$ se $0 < |a_1| < 1$, e a $g_r(z) = 2z$ se $|a_1| > 1$.*

Si noti che $g_a(z) = \frac{1}{2}z$ and $g_r(z) = 2z$ non possono essere topologicamente localmente coniugati, perché (per esempio) l'insieme stabile di g_r si riduce a un solo punto mentre l'insieme stabile di g_a ha parte interna non vuota.

La Figura 1 mostra il bacino d'attrazione dell'origine (cioè l'insieme dei punti la cui orbita converge all'origine; in questo caso coincide con l'insieme stabile se prendiamo come dominio di definizione di f tutto il piano complesso) per $f(z) = (\frac{3}{4} + \frac{i}{2})z + z^2$; l'origine è al centro della circonferenza più grande a destra

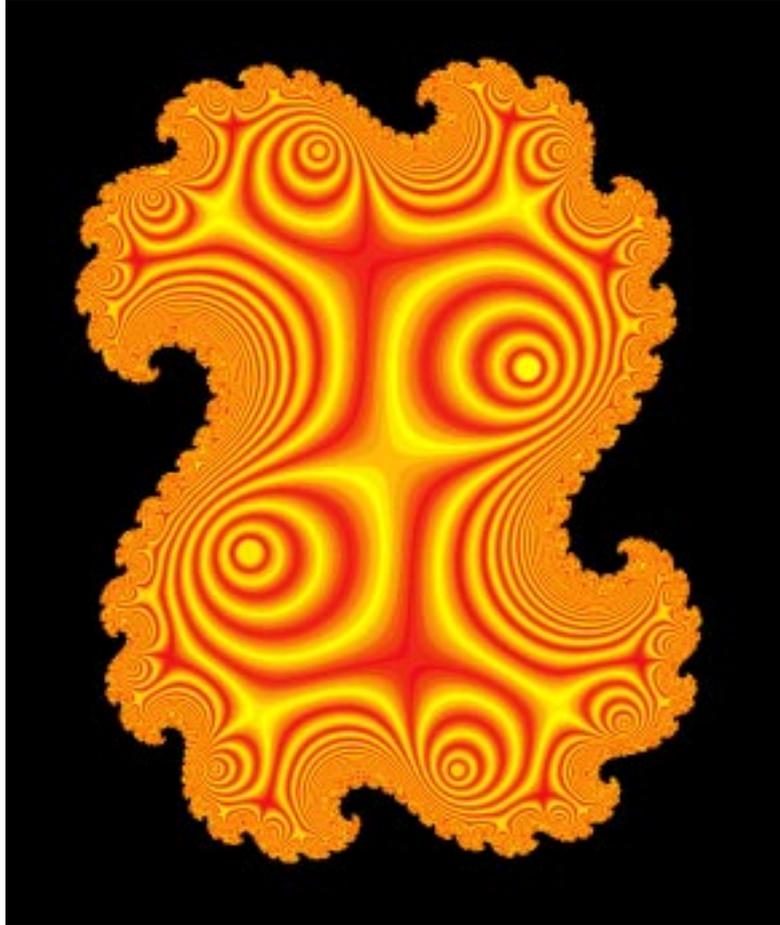


Figura 1 Bacino di attrazione di $f(z) = (\frac{3}{4} + \frac{i}{2})z + z^2$, con le curve di livello di $|\varphi|$.

verso l'alto. Le linee che si vedono sono le curve di livello del modulo $|\varphi|$ della coniugazione con la parte lineare $g(z) = (\frac{3}{4} + \frac{i}{2})z$ estesa a tutto il bacino d'attrazione in modo da continuare a soddisfare la relazione $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. I centri delle circonferenze secondarie che si vedono nella figura sono i punti la cui orbita termina sull'origine; per esempio, il centro della circonferenza più grande a sinistra verso il basso è il punto $-(\frac{3}{4} + \frac{i}{2})$. Al centro della figura si trova $z_0 = -\frac{1}{2}(\frac{3}{4} + \frac{i}{2})$, che è l'unico punto critico di f . Si può dimostrare che la curva di livello di $|\varphi|$ passante per z_0 racchiude il più grande dominio contenente l'origine in cui φ è un biolomorfismo con un disco.

La Figura 2 mostra un ingrandimento dell'insieme stabile della stessa f , con evidenziata l'orbita di un punto. Si può vedere come l'orbita converge all'origine ruotando lungo una spirale esattamente analoga a quella che si otterrebbe usando la funzione lineare $g(z) = (\frac{3}{4} + \frac{i}{2})z$.

Il Teorema 2.1 è il risultato ideale di dinamica locale: offre una soluzione completa ed esplicita ai problemi (P1)–(P4). Buona parte della dinamica locale olomorfa in una e più variabili è dedicata a cercare di ottenere risultati analoghi negli altri casi.

Per esempio, ogni sistema dinamico discreto olomorfo locale iperbolico $F \in \text{End}(\mathbb{C}^n, O)$ è topologicamente localmente coniugato alla sua parte lineare dF_O (*Teorema di Grobman-Hartman*; si veda, per esempio, [A1]). Invece, in generale *non* è olomorficamente localmente (e neppure formalmente) coniugato a dF_O : possono intervenire fenomeni detti di *risonanza* (che impediscono la coniugazione formale) o di *piccoli divisori* (che impediscono la convergenza della coniugazione formale); si veda, per esempio, [He].

Concludiamo questa sezione parlando velocemente del caso superattrattivo, che in una dimensione presenta numerose analogie col caso attrattivo. Se 0 è un punto fisso superattrattivo per $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$, possiamo

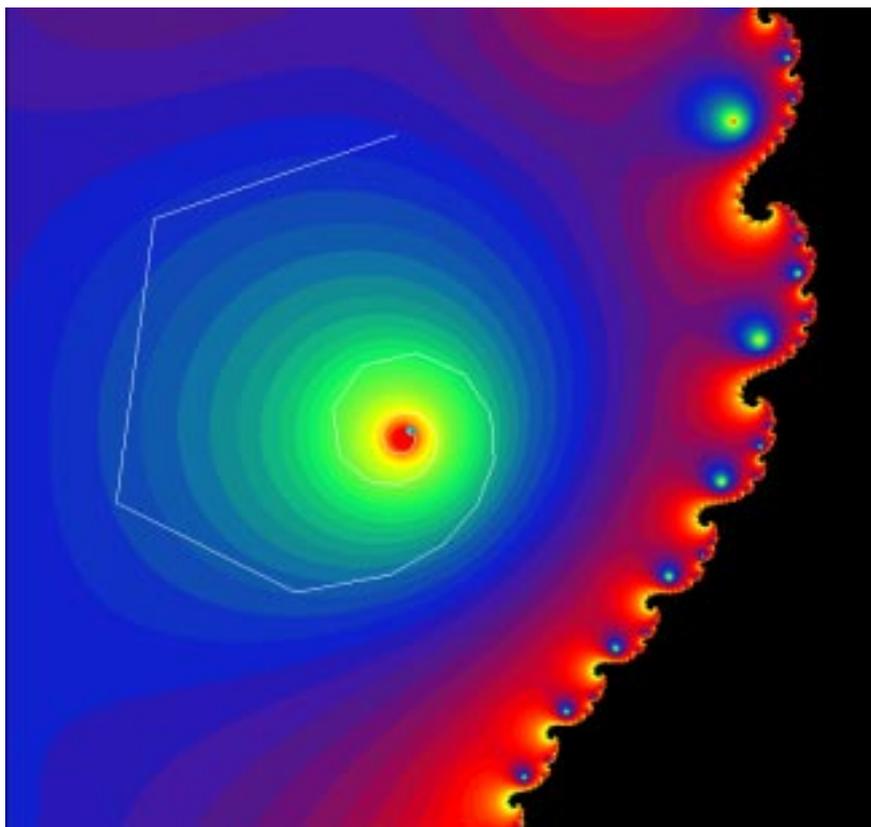


Figura 2 Insieme stabile di $f(z) = (\frac{3}{4} + \frac{i}{2})z + z^2$, con un'orbita.

scrivere

$$f(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \dots$$

con $a_r \neq 0$; il numero $r \geq 2$ è l'ordine del punto superattrattivo. Un ragionamento simile a quello già visto mostra che per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo l'insieme stabile di $f|_{\Delta_\varepsilon}$ continua a essere tutto Δ_ε , e le orbite convergono (più velocemente rispetto al caso attrattivo) all'origine. Con un poco più di lavoro è possibile classificare completamente i sistemi dinamici ologorfi locali con un punto fisso superattrattivo, ottenendo il

Teorema 2.2: (Böttcher, 1904 [Bö]) *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico ologorfo locale unidimensionale con un punto fisso superattrattivo di ordine $r \geq 2$ nell'origine. Allora:*

- (i) f è ologorficamente (e topologicamente e formalmente) localmente coniugato alla funzione $g(z) = z^r$.
- (ii) L'ordine è un insieme completo di invarianti topologici, ologorfi e formali, per i sistemi dinamici ologorfi locali unidimensionali con un punto fisso superattrattivo.

La Figura 3 mostra il bacino d'attrazione dell'origine per $f(z) = z^2 + \frac{1}{2}z^3$. L'origine è al centro della circonferenza principale a destra. I centri delle altre circonferenze sono di nuovo i punti la cui orbita termina sull'origine; per esempio, il centro della circonferenza principale a sinistra è il punto -2 . Si vede bene anche $z_0 = -\frac{4}{3}$, l'altro punto critico di f .

Il teorema di Böttcher è un risultato prettamente unidimensionale; l'analogo multidimensionale è falso (si veda [HP]).

3. Il caso parabolico

Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico ologorfo locale unidimensionale (non lineare) con un punto fisso parabolico nell'origine. Allora possiamo scrivere

$$f(z) = e^{2i\pi p/q} z + a_{r+1} z^{r+1} + a_{r+2} z^{r+2} + \dots, \quad (3.1)$$

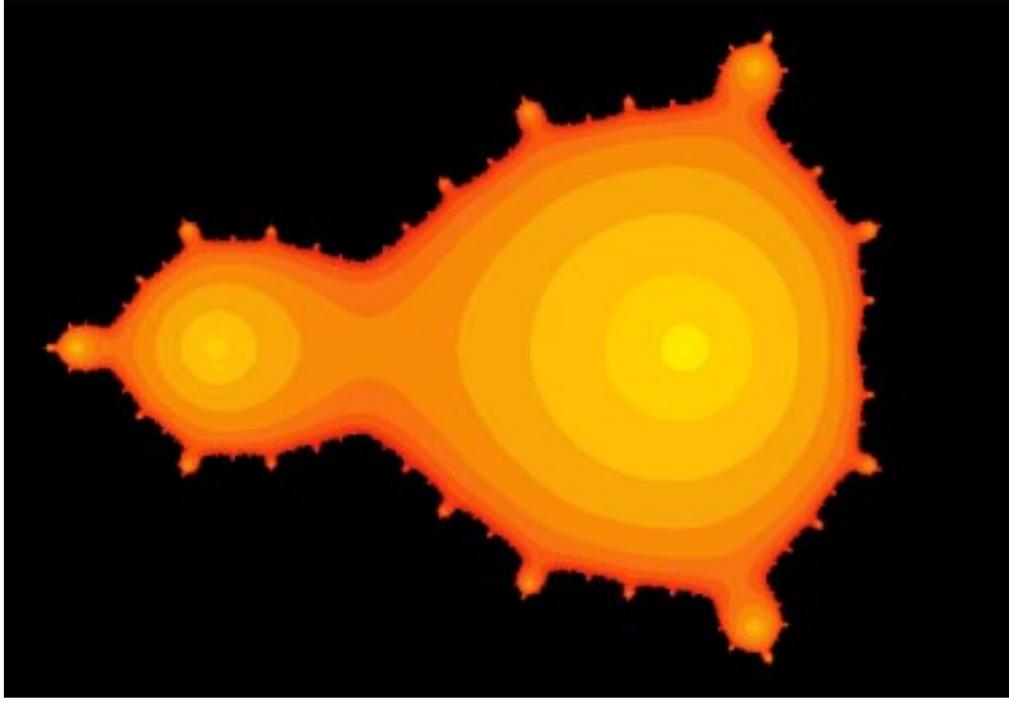


Figura 3 Bacino di attrazione di $f(z) = z^2 + \frac{1}{2}z^3$.

con $a_{r+1} \neq 0$, dove $p/q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ è il numero di rotazione di f , mentre $r \geq 1$ è la molteplicità di f .

Nella sezione precedente abbiamo visto che nel caso iperbolico era sempre possibile coniugare f alla sua parte lineare, e, nel caso superattrattivo, al primo termine non nullo nello sviluppo in serie di potenze. Nel caso parabolico, invece, questo è in generale impossibile: infatti, si vede facilmente che una f come in (3.1) è olomorficamente (o topologicamente o formalmente) localmente coniugata alla sua parte lineare $g(z) = \lambda z$ se e solo se $f^q \equiv \text{id}$.

Una conseguenza immediata è che se il numero di rotazione è 0 (cioè se il moltiplicatore è 1, e in tal caso diremo che f è tangente all'identità), allora f non può essere localmente coniugata all'identità (a meno che non sia l'identità fin dall'inizio, caso dinamicamente non molto interessante). Più precisamente, l'insieme stabile di una f tangente all'identità non può mai essere un intorno dell'origine. Per avere un'idea del perché, consideriamo prima di tutto una funzione f_0 della forma

$$f_0(z) = z + az^{r+1} = z(1 + az^r)$$

per qualche $a \neq 0$ e $r \geq 1$. Scegliamo $v \in S^1 \subset \mathbb{C}$ in modo che av^r sia reale e positivo. Allora per ogni $c > 0$ si ha

$$f_0(cv) = c(1 + c^r av^r)v \in \mathbb{R}^+v;$$

inoltre,

$$|f_0(cv)| > |cv|.$$

In altre parole, la semiretta \mathbb{R}^+v è f_0 -invariante e respinta dall'origine, per cui $K_{f_0} \cap \mathbb{R}^+v = \emptyset$. Viceversa, un conto analogo mostra che se av^r è reale e negativo allora il segmento $[0, |a|^{-1/r}]v$ è f_0 -invariante e attratto dall'origine, per cui $[0, |a|^{-1/r}]v \subset K_{f_0}$. Di conseguenza, K_{f_0} non è un intorno dell'origine ma non si riduce neppure a $\{0\}$.

Questo esempio suggerisce la definizione seguente. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ della forma (3.1) e tangente all'identità. Diremo che un versore $v \in S^1$ è una *direzione attrattiva* (rispettivamente, *repulsiva*) per f nell'origine se $a_{r+1}v^r$ è reale e negativo (rispettivamente, positivo). Chiaramente, esistono esattamente r direzioni attrattive, uniformemente e ciclicamente distribuite su S^1 e intervallate da esattamente r direzioni repulsive uniformemente distribuite: se $a_{r+1} = |a_{r+1}|e^{i\alpha}$, allora $v = e^{i\theta}$ è attrattiva (rispettivamente,

repulsiva) se e solo se

$$\theta = \frac{2k+1}{r}\pi - \frac{\alpha}{r} \quad \left(\text{rispettivamente, } \theta = \frac{2k}{r}\pi - \frac{\alpha}{r} \right),$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, una direzione repulsiva (attrattiva) per f è attrattiva (repulsiva) per f^{-1} .

Nel caso di f_0 , abbiamo visto che se $v \in S^1$ è una direzione attrattiva allora esiste un segmento di punti la cui orbita tende all'origine nella direzione di v . Più in generale, se $v \in S^1$ è una direzione attrattiva per un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità f , il *bacino attrattivo* centrato in v è l'insieme dei punti $z \in K_f \setminus \{0\}$ tali che $f^k(z) \rightarrow 0$ e $f^k(z)/|f^k(z)| \rightarrow v$ per $k \rightarrow +\infty$ (si noti che, a meno di rimpicciolire il dominio di f , possiamo assumere che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in K_f \setminus \{0\}$). Se z appartiene al bacino centrato in v , diremo che l'orbita di z *tende a 0 tangente a v* . In maniera analoga, possiamo definire il *bacino repulsivo* centrato in direzione repulsiva v come il bacino attrattivo per f^{-1} centrato in v .

Bacini attrattivi centrati in direzioni attrattive diverse sono chiaramente disgiunti. Invece, un bacino attrattivo e un bacino repulsivo possono interscacciarsi; l'orbita di un punto dell'intersezione inizialmente si allontana dall'origine fino a uscire dal bacino repulsivo, e a quel punto ritorna indietro rimanendo dentro il bacino attrattivo e convergendo all'origine tangente alla direzione attrattiva corrispondente a quel bacino.

Certo, a priori i bacini attrattivi e repulsivi potrebbero anche essere vuoti. Invece, il famoso *Teorema del fiore di Leau-Fatou* ci assicura che così non è, anzi; i bacini attrattivi e repulsivi sono aperti non vuoti disposti ciclicamente intorno all'origine, come petali di un fiore, bacini repulsivi e attrattivi alternati come le corrispondenti direzioni attrattive e repulsive, e la loro unione forma un intorno bucato dell'origine. Inoltre, la dinamica su ciascun bacino è essenzialmente coniugata a una traslazione. Più precisamente abbiamo il

Teorema 3.1: (Leau, 1897 [L]; Fatou, 1919-20 [F1, 2, 3]) *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r \geq 1$ nell'origine. Allora:*

- (i) *I bacini attrattivi e repulsivi sono aperti non vuoti aderenti all'origine, e la loro unione assieme all'origine forma un intorno dell'origine.*
- (ii) *$K_f \setminus \{0\}$ è l'unione (disgiunta) dei bacini attrattivi centrati nelle r direzioni attrattive.*
- (iii) *Se B è un bacino centrato in una delle direzioni attrattive, allora esiste una funzione olomorfa $\varphi: B \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi \circ f(z) = \varphi(z) + 1$ per ogni $z \in B$. Inoltre, $\varphi(B)$ contiene un semipiano destro H tale che, posto $P = \varphi^{-1}(H)$, ogni orbita in B è definitivamente contenuta nell'aperto f -invariante P , e $\varphi|_P$ è un biolomorfismo fra P e H — per cui $f|_P$ è olomorficamente coniugata alla traslazione $z \mapsto z + 1$.*

Gli aperti P sono detti *petali attrattivi* del fiore di Leau-Fatou; i corrispondenti aperti per f^{-1} sono detti *petali repulsivi*. Si può dimostrare che se B' è un bacino repulsivo allora esiste un'applicazione olomorfa ψ che è un biolomorfismo fra un petalo repulsivo $P' \subset B'$ e un semipiano *sinistro*, e che coniuga f con la traslazione $w \mapsto w + 1$. In altre parole, a meno di cambiare coordinate la funzione f diventa una traslazione anche nei bacini repulsivi.

La dinamica locale è dunque la seguente: le orbite dei punti nei bacini attrattivi entrano nel corrispondente petalo attrattivo e poi tendono all'origine tangenti a una direzione attrattiva; le orbite che partono nell'intersezione fra un bacino repulsivo e uno attrattivo inizialmente si allontanano dall'origine fino a uscire dal corrispondente petalo repulsivo, e a quel punto tornano verso l'origine entrando nel petalo attrattivo; le orbite che invece partono da punti non contenuti in alcun bacino attrattivo evadono.

La Figura 4 mostra i bacini attrattivi e repulsivi di $f(z) = z - z^3$, che ha un punto parabolico di molteplicità 2 nell'origine (al centro della figura). Le direzioni attrattive sono ± 1 , cioè le due semirette reali; i corrispondenti bacini attrattivi sono colorati in giallo/arancione (la parte a destra dell'origine è il bacino centrato in $+1$, mentre la metà sinistra è il bacino centrato in -1). Le direzioni repulsive sono $\pm i$, cioè le due semirette immaginarie pure; in blu/verde è evidenziata la parte dei bacini repulsivi non contenuta nei bacini attrattivi.

La Figura 5 mostra un ingrandimento dell'insieme stabile della stessa funzione. Il bacino attrattivo centrato in $+1$ è colorato in rosso, quello centrato in -1 è colorato in verde, mentre la parte dei bacini repulsivi che serve per completare un intorno bucato dell'origine è colorata in blu. Si vede anche un'orbita originata da un punto contenuto nell'intersezione fra un bacino repulsivo e uno attrattivo. L'orbita parte

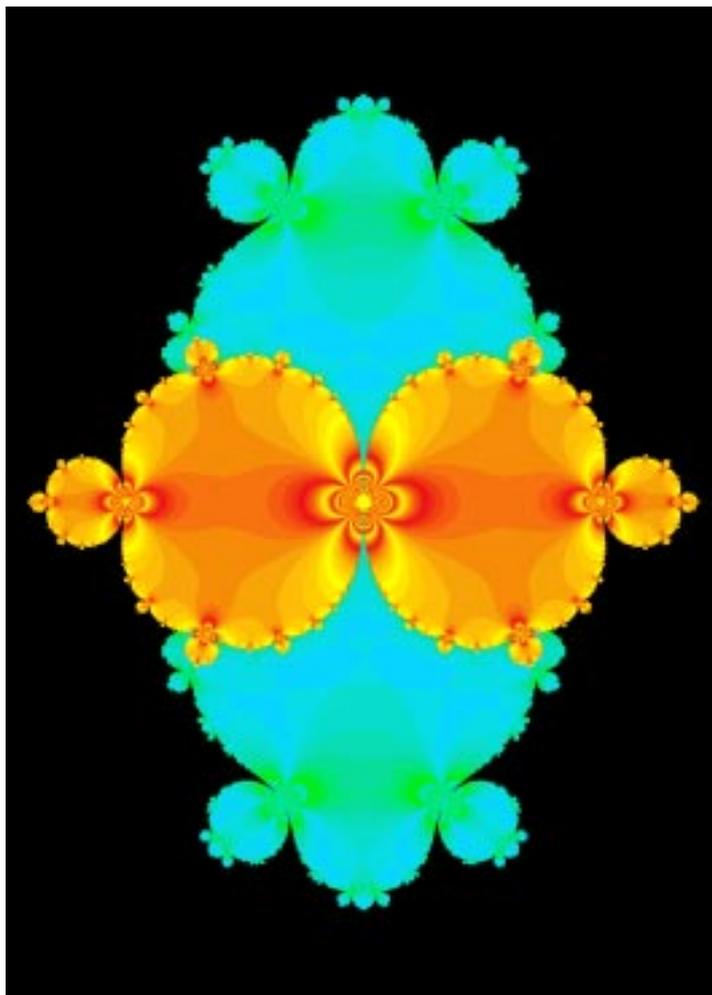


Figura 4 Bacini attrattivi e repulsivi di $f(z) = z - z^3$.

allontanandosi dall'origine finché esce dal bacino repulsivo; a quel punto ritorna verso l'origine tangente alla corrispondente direzione attrattiva (in questo caso -1).

La Figura 6 mostra un ingrandimento dell'insieme stabile di $f(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5$, che ha un punto parabolico di molteplicità 1 nell'origine. In questo caso l'unica direzione attrattiva è $+1$, il semiasse reale positivo, mentre l'unica direzione repulsiva è -1 , il semiasse reale negativo. Le circonferenze che si vedono a destra sono i bordi dei petali attrattivi; i pezzi di circonferenza a sinistra sono invece il bordo dell'intersezione dei petali repulsivi con il bacino attrattivo. L'orbita evidenziata è di nuovo originata da un punto nell'intersezione fra bacini attrattivi e bacini repulsivi, e di nuovo prima si allontana dall'origine e poi rientra convergendo tangente alla direzione $+1$.

Il Teorema del fiore di Leau-Fatou (la cui dimostrazione è tutt'altro che semplice) ci fornisce una descrizione completa della dinamica in un intorno dell'origine. Alla fine degli anni '70 Camacho ha inoltre dimostrato come dedurre da questa descrizione la classificazione topologica completa dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità:

Teorema 3.2: (Camacho, 1978 [C]; Shcherbakov, 1982 [S]) *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r \geq 1$ nell'origine. Allora f è topologicamente localmente coniugato alla funzione*

$$z \mapsto z + z^{r+1} .$$

In particolare, la molteplicità è un sistema completo di invarianti topologici per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità.

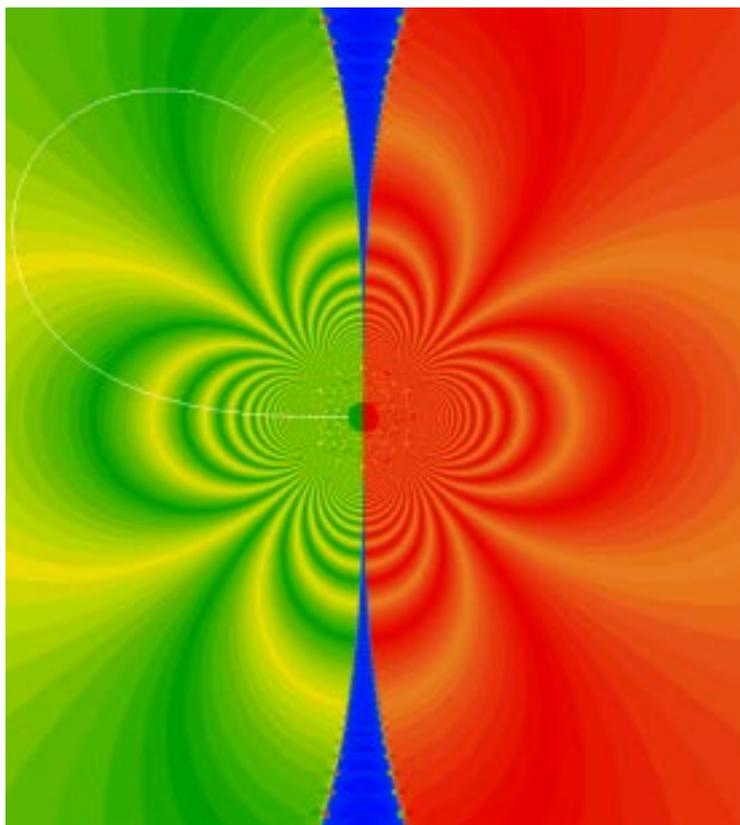


Figura 5 Insieme stabile di $f(z) = z - z^3$ con un'orbita.

La classificazione formale si ottiene con un semplice conto (si veda, per esempio, [Mi]), ma, forse sorprendentemente, è diversa dalla classificazione topologica:

Proposizione 3.3: *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale unidimensionale tangente all'identità e di molteplicità $r \geq 1$ nell'origine. Allora f è formalmente coniugata alla funzione*

$$g(z) = z + z^{r+1} + \beta z^{2r+1}, \quad (3.2)$$

dove $\beta \in \mathbb{C}$ è un invariante formale (e olomorfo) dato da

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - f(z)}, \quad (3.3)$$

e l'integrale è fatto lungo una piccola circonferenza γ attorno all'origine.

Il numero β dato da (3.3) è detto *indice* di f nel punto fisso. In particolare, quindi, molteplicità e indice formano un sistema completo di invarianti formali per i sistemi dinamici olomorfi discreti unidimensionali tangenti all'identità.

La classificazione olomorfa è incredibilmente più complicata: come dimostrato da Voronin [V] and Écalle [É1, 2] nel 1981, dipende da invarianti funzionali. Molto a grandi linee, l'idea è la seguente: supponiamo di avere un bacino attrattivo B e un bacino repulsivo B' che si intersecano. Su entrambi i bacini abbiamo dei cambiamenti di coordinate che coniugano f a una traslazione; è naturale considerare la funzione di transizione fra questi due cambi di coordinate. Ripetendo il procedimento per ogni coppia di bacini che si interseca, otteniamo $2r$ funzioni canonicamente associate a f , con precise proprietà di periodicità e crescita all'infinito. Inoltre, se g è localmente olomorficamente coniugata a f allora le $2r$ funzioni associate a g coincidono con quelle associate a f a meno di una traslazione nell'argomento; quindi la classe di queste $2r$

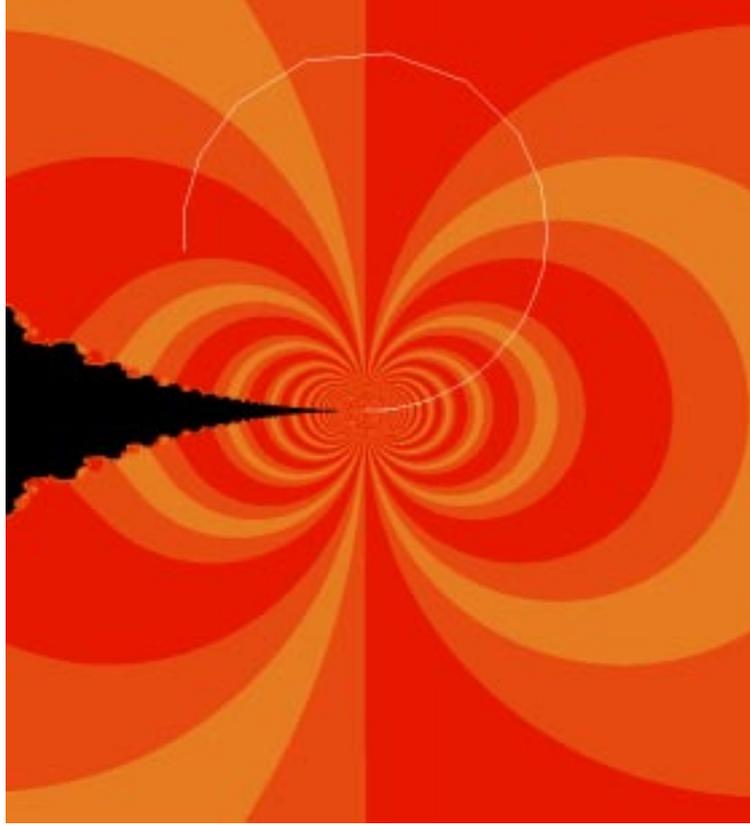


Figura 6 Insieme stabile di $f(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5$ con evidenziati i petali e un'orbita.

funzioni, considerate a meno di traslazioni nell'argomento, è un nuovo invariante olomorfo, detto *invariante settoriale*.

Siccome la dinamica in ciascun bacino è essenzialmente quella di una traslazione, non è difficile credere (ma ben più difficile dimostrare) che molteplicità, indice e invariante settoriale determinino completamente il sistema dinamico locale tangente all'identità. Forse più inaspettato è il fatto che tutte le possibilità sono effettivamente realizzate: questo è il contenuto dei risultati di Écalle e Voronin.

Teorema 3.4: (Écalle, 1981 [É1, 2]; Voronin, 1981 [V]) *La molteplicità, l'indice e l'invariante settoriale formano un sistema completo di invarianti olomorfi per i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità. Inoltre, ogni possibile scelta di molteplicità, indice e invariante settoriale è realizzata da una $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ tangente all'identità.*

Per una traccia della dimostrazione e una descrizione più geometrica dell'invariante settoriale si vedano [I], [K] e [M1, 2] (oltre agli articoli originali).

Una conseguenza interessante di questo risultato è che i sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali tangenti all'identità forniscono esempi di sistemi dinamici locali che sono topologicamente localmente coniugati senza esserlo né olomorficamente né formalmente, e di sistemi dinamici olomorfi locali che sono formalmente coniugati senza esserlo olomorficamente.

Rimane da studiare il caso in cui il numero di rotazione è razionale non nullo. Ma se $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ ha numero di rotazione p/q , allora f^q è tangente all'identità. Quindi possiamo applicare quanto appena visto a f^q e dedurne informazioni sulla dinamica della f originale. Qui ci limitiamo a elencare alcuni risultati; dimostrazioni e ulteriori dettagli si possono trovare in [Mi], [Ma], [C], [É1, 2] e [V].

Teorema 3.5: *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, con numero di rotazione p/q ridotto ai minimi termini. Supponiamo che $f^q \neq \text{id}$. Allora esistono $n \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{C}$ tali che:*

(i) f è formalmente coniugato a

$$g(z) = \lambda z + z^{nq+1} + \beta z^{2nq+1};$$

(ii) (Camacho) f è topologicamente localmente coniugato a

$$g(z) = \lambda z + z^{nq+1};$$

(iii) (Leau-Fatou) f^q ha molteplicità nq , e f agisce sui petali attrattivi (rispettivamente, repulsivi) di f^q come una permutazione composta da n cicli disgiunti. Inoltre, $K_f = K_{f^q}$.

4. Il caso ellittico

Per completare lo studio dei sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali ci rimane da affrontare il caso ellittico:

$$f(z) = e^{2\pi i\theta} z + a_2 z^2 + \dots \in \mathbb{C}_0\{z\}, \quad (4.1)$$

con $\theta \notin \mathbb{Q}$. Come vedremo, la dinamica dipenderà principalmente dalle proprietà aritmetiche di θ . Infatti, il succo dei risultati di Cremer, Siegel, Bryuno e Yoccoz che presenteremo in questa sezione è che esiste un sottoinsieme $B \subset [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, di misura piena e che può essere definito in termini di approssimabilità dai razionali, tale che tutti i sistemi dinamici olomorfi locali della forma (4.1) con $\theta \in B$ sono *olomorficamente linearizzabili*, cioè olomorficamente localmente coniugati alla loro parte lineare, la rotazione irrazionale $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$. Viceversa, il complementare $[0, 1] \setminus B$ è un insieme denso, tale che se $\theta \in [0, 1] \setminus B$ allora il polinomio quadratico $z \mapsto z^2 + e^{2\pi i\theta} z$ non è olomorficamente linearizzabile. Un sistema dinamico olomorfo locale ellittico olomorficamente linearizzabile ha una dinamica molto semplice: a meno di un cambiamento di variabile, agisce come una rotazione attorno all'origine. Invece, un sistema dinamico olomorfo locale ellittico *non* olomorficamente linearizzabile ha una dinamica estremamente complicata, e non ancora compresa del tutto.

La prima osservazione significativa nel caso ellittico è che la linearizzabilità olomorfa è una proprietà *topologica* — e, al contempo, i sistemi ellittici sono *tutti* formalmente linearizzabili (vedi [Y2, Mi]):

Proposizione 4.1: *Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore $\lambda = e^{2\pi i\theta} \in S^1$, con $\theta \notin \mathbb{Q}$. Allora:*

- (i) f è olomorficamente linearizzabile se e solo se è topologicamente linearizzabile se e solo se 0 è contenuto nella parte interna di K_f ;
- (ii) f è sempre formalmente coniugato alla sua parte lineare.

In particolare, si dimostra con un semplice conto che esiste un'unica serie formale

$$h(z) = z + h_2 z^2 + h_3 z^3 + \dots \in \mathbb{C}[[z]] \quad (4.2)$$

tale che $h(\lambda z) = f(h(z))$. Inoltre, se f è scritto come in (4.1), allora i coefficienti di h sono della forma

$$h_j = \frac{a_j + X_j(h_2, \dots, h_{j-1})}{\lambda^j - \lambda}, \quad (4.3)$$

dove $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, e X_j è un polinomio. In particolare, h_j dipende solo da λ e da a_2, \dots, a_j .

Dunque il sistema dinamico f è olomorficamente (e topologicamente) linearizzabile se e solo se la serie formale h i cui coefficienti sono dati da (4.3) converge in un qualche intorno dell'origine. Chiaramente, il raggio di convergenza di h dipende dal comportamento di $|\lambda^j - \lambda| = |\lambda^{j-1} - 1|$: se questa differenza diventa troppo piccola (anche se non può mai annullarsi, in quanto λ non è una radice dell'unità), la serie che definisce h non può convergere. Questo è noto come il *problema dei piccoli divisori* in questo contesto.

Vogliamo allora introdurre una misura di quanto piccola possa diventare la differenza $|\lambda^k - 1|$. Ci sono vari modi per farlo; il più semplice consiste nel porre

$$\Omega_\lambda(m) = \min_{1 \leq k \leq m} |\lambda^k - 1|,$$

per $\lambda \in S^1$ e $m \geq 1$. Chiaramente, λ è una radice m_0 -esima dell'unità se e solo se $\Omega_\lambda(m) = 0$ per ogni $m \geq m_0$; inoltre,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Omega_\lambda(m) = 0$$

per tutti i $\lambda \in S^1$, in quanto è ben noto che se $\lambda \in S^1$ non è una radice dell'unità allora l'insieme $\{\lambda^k\}$ delle potenze di λ è denso in S^1 .

La prima dimostrazione dell'esistenza di sistemi dinamici olomorfi locali unidimensionali con un punto fisso ellittico non olomorficamente linearizzabili è stata ottenuta da Cremer nel 1927, in [Cr1]. Il suo risultato più generale è il seguente:

Teorema 4.2: (Cremer, 1938 [Cr2]) *Sia $\lambda \in S^1$ tale che*

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{\Omega_\lambda(m)} = +\infty. \quad (4.4)$$

Allora esiste $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ che non è olomorficamente linearizzabile. Inoltre, l'insieme dei $\lambda \in S^1$ che soddisfano (4.4) è più che numerabile e denso in S^1 .

La costruzione di f è piuttosto semplice: basta scegliere induttivamente $a_j \in \{0, 1\}$ in modo che $|a_j + X_j| \geq 1/2$ per ogni $j \geq 2$, dove X_j è come in (4.3). Allora

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$$

appartiene a $\mathbb{C}_0\{z\}$, mentre (4.4) implica che il raggio di convergenza della linearizzazione formale di f è 0, per cui f non può essere olomorficamente linearizzabile.

L'insieme dei $\theta \in [0, 1]$ tali che $\lambda = e^{2\pi i \theta} \in S^1$ soddisfi (4.4) contiene numeri irrazionali particolarmente ben approssimabili dai razionali. Infatti, non è difficile vedere che se $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ è tale che per ogni $q_0 \geq 2$ esiste $p/q \in \mathbb{Q}$ ridotta ai minimi termini con $q \geq q_0$ e tale che

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^l}, \quad (4.5)$$

allora $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ soddisfa (4.4) (e l'insieme di questi θ è più che numerabile e denso in S^1).

Dunque se $\Omega_\lambda(m)$ tende a zero molto velocemente allora esistono sistemi dinamici olomorfi locali di moltiplicatore λ non olomorficamente linearizzabili. Viceversa, Siegel nel 1942 ha dimostrato che se $\Omega_\lambda(m)$ tende a zero abbastanza lentamente, allora ogni sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ è olomorficamente linearizzabile:

Teorema 4.3: (Siegel, 1942 [Si]) *Sia $\lambda \in S^1$ tale che esistano $\beta > 1$ e $\gamma > 0$ per cui*

$$\forall m \geq 2 \quad \frac{1}{\Omega_\lambda(m)} \leq \gamma m^\beta. \quad (4.6)$$

Allora ogni $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ è olomorficamente linearizzabile. Inoltre, l'insieme dei $\lambda \in S^1$ che soddisfano (4.6) per qualche $\beta > 1$ e $\gamma > 0$ ha misura di Lebesgue piena in S^1 , e contiene tutti i numeri algebrici.

È interessante notare che per $\lambda \in S^1$ generico in senso topologico esiste un sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ non linearizzabile, mentre per quasi tutti (nel senso della teoria della misura) i $\lambda \in S^1$ ogni sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ è linearizzabile. In altre parole, se prendiamo un $\lambda \in S^1$ a caso ogni sistema dinamico di moltiplicatore λ è linearizzabile, ma nonostante ciò esistono una quantità più che numerabile di λ arbitrariamente vicini a qualsiasi punto di S^1 per cui questo non è vero!

La dimostrazione originale del Teorema 4.3 usa la tecnica della serie maggiorante, che consiste nel trovare una serie convergente i cui coefficienti siano maggiori o uguali di quelli della linearizzazione formale. Altre dimostrazioni si ottengono come applicazione del cosiddetto metodo di Kolmogorov-Arnold-Moser (o metodo KAM); si veda [HK] o [A1].

Chiaramente, fra la condizione di Siegel (4.6) e quella di Cremer (4.4) c'è abbondante spazio di manovra; è naturale chiedersi se esista una condizione su λ , sempre di natura aritmetica, necessaria e sufficiente perché ogni sistema dinamico olomorfo locale di moltiplicatore λ sia olomorficamente linearizzabile (o, come diremo, che abbia l'origine come *punto di Siegel*; se $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ con $\lambda = e^{2\pi i \theta} \in S^1$ ha $\theta \notin \mathbb{Q}$ ma non è olomorficamente linearizzabile, diremo invece che l'origine è un *punto di Cremer* per f). La risposta è contenuta nel celebre *Teorema di Bryuno-Yoccoz*:

Teorema 4.4: (Bryuno, 1965 [Bry1, 2, 3], Yoccoz, 1988 [Y1, 2]) *Sia $\lambda \in S^1$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) *l'origine è un punto di Siegel per il polinomio quadratico $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$;*
- (ii) *l'origine è un punto di Siegel per tutte le $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ ;*
- (iii) *il numero λ soddisfa la condizione di Bryuno*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \log \frac{1}{\Omega_\lambda(2^{k+1})} < +\infty. \quad (4.7)$$

Bryuno, usando il metodo della serie maggiorante (si veda anche [He] e relativa bibliografia) ha dimostrato che la condizione (iii) implica la condizione (ii). Yoccoz, usando un brillante approccio geometrico basato sulle applicazioni quasi-conformi, ha invece dimostrato che (i) è equivalente a (ii), e che (ii) implica (iii), cioè che se λ non soddisfa (4.7) allora l'origine è un punto di Cremer per qualche $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ — e dunque è un punto di Cremer per il polinomio quadratico $f_\lambda(z)$. Si veda anche [P7] e [BC] per risultati correlati.

È interessante osservare che se $\lambda \in S^1$ non è una radice dell'unità e non soddisfa la condizione di Bryuno (4.7), allora possiamo trovare $f_1, f_2 \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ tali che f_1 sia olomorficamente linearizzabile e f_2 non lo sia. Quindi f_1 e f_2 sono formalmente coniugati senza essere né olomorficamente né topologicamente localmente coniugati.



Figura 7 Insieme stabile di $f(z) = e^{2\pi i \theta} z + z^2$ con $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$, che ha un punto di Siegel nell'origine.

La Figura 7 mostra l'insieme stabile di $f(z) = e^{2\pi i \theta} z + z^2$ con $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$. Siccome θ è un numero algebrico, soddisfa la condizione di Siegel; quindi f è olomorficamente localmente coniugata alla rotazione

irrazionale di angolo θ . In azzurro si vede il più grande aperto in cui f è coniugata a una rotazione (l'origine è al centro della figura), il *disco di Siegel* di f . Le zone nere hanno orbite che cadono nel disco di Siegel, mentre le zone arancioni sono composte da punti le cui orbite divergono all'infinito (e quindi non fanno parte dell'insieme stabile).

Dunque se 0 è un punto di Siegel per $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$ la dinamica locale di f è completamente descritta. Invece, se 0 è un punto di Cremer per $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$, la dinamica locale di f è incredibilmente complicata e ancora non del tutto chiarita. Pérez-Marco (in [P2, 4, 5, 6]) ha studiato la topologia e la dinamica dell'insieme stabile in questo caso. Alcuni dei suoi risultati sono riassunti nel seguente

Teorema 4.5: (Pérez-Marco, 1995 [P5, 6]) *Supponiamo che 0 sia un punto di Cremer per il sistema dinamico olomorfo locale $f \in \text{End}(\mathbb{C}, 0)$. Allora:*

- (i) *L'insieme stabile K_f è compatto, connesso, pieno (cioè $\mathbb{C} \setminus K_f$ è connesso), non si riduce al solo $\{0\}$, e non è localmente connesso in alcun punto diverso dall'origine.*
- (ii) *Tutti i punti di $K_f \setminus \{0\}$ sono ricorrenti (cioè punti di accumulazione della loro orbita).*
- (iii) *Esiste un'orbita in K_f che si accumula sull'origine, ma nessuna orbita non banale converge all'origine.*

Ch'io sappia, a tutt'oggi non esiste ancora una classificazione topologica od olomorfa completa dei sistemi dinamici olomorfi locali con un punto di Cremer (e non esiste neppure alcun disegno significativo dell'insieme stabile di un punto di Cremer!). Si sa solo che la classificazione olomorfa dev'essere molto complicata: Yoccoz [Y2] ha dimostrato che se $\lambda \in S^1$ non è una radice dell'unità e non soddisfa la condizione di Bryuno (4.7) allora esiste una famiglia più che numerabile di elementi di $\text{End}(\mathbb{C}, 0)$ di moltiplicatore λ che non sono a due a due olomorficamente localmente coniugati, né olomorficamente localmente coniugati ad alcuna funzione intera.

Altri risultati sulla dinamica nell'intorno di un punto di Cremer sono contenuti in [P1, 3] e [B1, 2].

5. Commenti conclusivi

Anche questa semplice carrellata su un settore relativamente ristretto della dinamica olomorfa rivela due delle principali caratteristiche dei sistemi dinamici in generale.

Prima di tutto, lo studio di sistemi dinamici apparentemente molto semplici ma *non* lineari (per esempio, polinomi quadratici) può rivelare comportamenti anche estremamente complessi, che richiedono tecniche molto raffinate per il loro studio. Contrariamente a quanto potrebbe sembrare, questo è un notevole pregio. Non solo perché permette di ottenere risultati profondi (e medaglie Fields — come Yoccoz — o premi Abel — come Carleson), ma per una conseguenza che si rivela a pieno rovesciando i termini della questione: *comportamenti molto complessi possono venire descritti da sistemi dinamici semplici*. E questo è uno dei motivi del vasto utilizzo dei sistemi dinamici nelle applicazioni: la non linearità permette di creare modelli semplici di situazioni reali complesse — tipicamente caotiche.

La seconda caratteristica è che, come avevamo anticipato e poi abbiamo visto in pratica, è la natura stessa dei problemi che porta a utilizzare idee prese in prestito da altri campi della matematica (per esempio, tecniche di teoria di numeri per studiare i punti di Siegel). E questa inevitabile fertilizzazione incrociata rende, a mio parere, lavorare nel campo dei sistemi dinamici particolarmente interessante e stimolante.

Vale la pena notare che, per evidenti limitazioni di spazio, non abbiamo minimamente affrontato le relazioni fra la dinamica locale e la dinamica globale di funzioni olomorfe. Mi limito giusto a dire che, in un senso piuttosto preciso, la dinamica globale dei polinomi di una variabile complessa è dettata dalla dinamica locale nei punti periodici; in particolare, la parte non caotica della dinamica (contenuta nell'insieme di Fatou) è guidata dai punti periodici (super)attrattivi, parabolici o di Siegel, mentre la parte caotica della dinamica (contenuta nell'insieme di Julia) è legata ai punti periodici repulsivi e di Cremer; si veda [Mi]. Inoltre, ci sono interessanti risultati al confine fra la dinamica locale e la dinamica globale. Per esempio, è molto interessante lo studio del raggio di convergenza (e, più in generale, della continuazione analitica) delle coniugazioni con la parte lineare viste nei Teoremi di Koenigs e di Bryuno-Yoccoz (o con una traslazione nel Teorema del fiore di Leau-Fatou) per polinomi; si veda per esempio [Y2] o [P6].

Un'ultima caratteristica del campo dei sistemi dinamici che spero sia evidenziata da questa rassegna è l'abbondanza di problemi naturali spesso facili da enunciare (e spiegare) ma difficili da risolvere; e diversi di questi problemi sono tuttora aperti, anche nel sottocampo relativamente limitato dei sistemi dinamici discreti olomorfi locali, dallo studio approfondito della dinamica nei punti di Cremer al mare magnum della

dinamica non iperbolica in più variabili complesse. Mi auguro che questa breve rassegna possa stimolare qualcuno a inoltrarsi in questo settore, con la speranza che riesca, magari, a risolvere qualcuna delle questioni aperte.

References

- [A1] M. Abate: **An introduction to hyperbolic dynamical systems**. I.E.P.I. Pisa, 2001.
- [A2] M. Abate: *Discrete local holomorphic dynamics*. In **Proceedings of 13th. Seminar on Analysis and Its Applications, Isfahan 2003**, Eds. S. Azam et al., University of Isfahan, Iran, 2005, pp. 1–32.
- [BS] E. Bedford, J. Smillie: *Polynomial diffeomorphisms of C^2 . VI. Connectivity of J* . Ann. of Math. **148** (1998), 695–735.
- [B1] K. Biswas: *Smooth combs inside hedgehogs*. Disc. Cont. Dyn. Sys. **12** (2005), 853–880.
- [B2] K. Biswas: *Hedgehogs of Hausdorff dimension one*. Preprint, 2003.
- [Bö] L.E. Böttcher: *The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis*. Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. **14** (1904), 155–234.
- [Bry1] A.D. Bryuno: *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*. Dokl. Akad. Nauk. USSR **165** (1965), 987–989.
- [Bry2] A.D. Bryuno: *Analytical form of differential equations, I*. Trans. Moscow Math. Soc. **25** (1971), 131–288.
- [Bry3] A.D. Bryuno: *Analytical form of differential equations, II*. Trans. Moscow Math. Soc. **26** (1972), 199–239.
- [BC] X. Buff, A. Chéritat: *The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks*. Ann. of Math. **164** (2006), 265–312.
- [C] C. Camacho: *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields*. Astérisque **59–60** (1978), 83–94.
- [Cr1] H. Cremer: *Zum Zentrumproblem*. Math. An.. **98** (1927), 151–163.
- [Cr2] H. Cremer: *Über die Häufigkeit der Nichtzentren*. Math. Ann. **115** (1938), 573–580.
- [É1] J. Écalle: **Les fonctions réurgentes. Tome I: Les algèbres de fonctions réurgentes**. Publ. Math. Orsay **81-05**, Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.
- [É2] J. Écalle: **Les fonctions réurgentes. Tome II: Les fonctions réurgentes appliquées à l’itération**. Publ. Math. Orsay **81-06**, Université de Paris-Sud, Orsay, 1981.
- [F1] P. Fatou: *Sur les équations fonctionnelles, I*. Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–271.
- [F2] P. Fatou: *Sur les équations fonctionnelles, II*. Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 33–94.
- [F3] P. Fatou: *Sur les équations fonctionnelles, III*. Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 208–314.
- [HK] B. Hasselblatt, A. Katok: **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [He] M. Herman: *Recent results and some open questions on Siegel’s linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of C^n near a fixed point*. In **Proc. 8th Int. Cong. Math. Phys.**, World Scientific, Singapore, 1986, pp. 138–198.
- [HP] J.H. Hubbard, P. Papadopol: *Superattractive fixed points in C^n* . Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 321–365.
- [I] Yu.S. Il’yashenko: *Nonlinear Stokes phenomena*. In **Nonlinear Stokes phenomena**, Adv. in Soviet Math. **14**, Am. Math. Soc., Providence, 1993, pp. 1–55.
- [K] T. Kimura: *On the iteration of analytic functions*. Funk. Ekvacioj **14** (1971), 197–238.
- [Kœ] G. Kœnigs: *Recherches sur les intégrals de certain equations fonctionelles*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **1** (1884), 1–41.
- [L] L. Leau: *Étude sur les equations fonctionelles à une ou plusieurs variables*. Ann. Fac. Sci. Toulouse **11** (1897), E1–E110.

- [M1] B. Malgrange: *Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*. Astérisque **92-93** (1981/82), 59–73.
- [M2] B. Malgrange: *Introduction aux travaux de J. Écalle*. *Ens. Math.* **31** (1985), 261–282.
- [Ma] S. Marmi: **An introduction to small divisors problems**. I.E.P.I., Pisa, 2000.
- [Mi] J. Milnor: **Dynamics in one complex variable. Third edition**. *Annals of Mathematics Studies*, 160. Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [P1] R. Pérez-Marco: *Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V.I. Arnold*. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **26** (1993), 565–644.
- [P2] R. Pérez-Marco: *Topology of Julia sets and hedgehogs*. Preprint, Université de Paris-Sud, 94-48, 1994.
- [P3] R. Pérez-Marco: *Non-linearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries*. *Invent. Math.* **199** (1995), 67–127.
- [P4] R. Pérez-Marco: *Hedgehogs dynamics*. Preprint, 1995.
- [P5] R. Pérez-Marco: *Sur une question de Dulac et Fatou*. *C.R. Acad. Sci. Paris* **321** (1995), 1045–1048.
- [P6] R. Pérez-Marco: *Fixed points and circle maps*. *Acta Math.* **179** (1997), 243–294.
- [P7] R. Pérez-Marco: *Total convergence or general divergence in small divisors*. *Comm. Math. Phys.* **223** (2001), 451–464.
- [S] A.A. Shcherbakov: *Topological classification of germs of conformal mappings with identity linear part*. *Moscow Univ. Math. Bull.* **37** (1982), 60–65.
- [Si] C.L. Siegel: *Iteration of analytic functions*. *Ann. of Math.* **43** (1942), 607–612.
- [V] S.M. Voronin: *Analytic classification of germs of conformal maps $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with identity linear part*. *Func. Anal. Appl.* **15** (1981), 1–17.
- [Y1] J.-C. Yoccoz: *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$* . *C.R. Acad. Sci. Paris* **306** (1988), 55–58.
- [Y2] J.-C. Yoccoz: *Théorème de Siegel, nombres de Bryuno et polynômes quadratiques*. Astérisque **231** (1995), 3–88.