MATEMATICA E STATISTICA

ESERCITAZIONI

ALBERTO SARACCO

1. Esercitazione del 17 ottobre 2006

1.1. Calcolo con la notazione scientifica.

Esercizio 1.1. *Quanto sangue umano c'è al mondo? Supponendo di metterlo tutto in Piazza dei Miracoli (elevando delle alte pareti di cristallo per contenerlo), che altezza raggiungerà?*

La popolazione umana è di circa sei miliardi di persone, ovvero $6 \cdot 10^9$. Ogni persona ha mediamente 5.6 litri di sangue, ovvero circa $5.6dm^3 = 5,. \cdot (10^{-1}m)^3 = 5.6 \cdot 10^{-3}m^3$. Per ottenere il volume totale di sangue umano al mondo moltiplichiamo le mantisse $6 \cdot 5.6 = 33.6$; sommiamo gli esponenti $9 + (-3) = 6$; portiamo in notazione scientifica $33.6 \cdot 10^6 m^3 = 3.36 \cdot 10^7 m^3$. Pertanto nel mondo ci sono (circa) $3.36 \cdot 10^7 m^3$ di sangue umano.

Sapendo che Piazza dei Miracoli è approssimativamente un rettangolo di $200m$ di lunghezza e $100m$ di larghezza, un parallelepipedo di base Piazza dei Miracoli e altezza h ha volume $V = 200m \cdot 100m \cdot h$. Uguagliando questo volume al volume di sangue umano al mondo si ottiene

$$h \approx \frac{3.36 \cdot 10^7 m^3}{2 \cdot 10^4 m^2} = 1.68 \cdot 10^3 m = 1680m,$$

ovvero un'altezza comparabile con quella del Monte Amiata, che con i suoi $1738m$ è la montagna più alta della Toscana e il secondo vulcano più alto d'Italia.

Esercizio 1.2. *Sapendo che la Torre di Pisa è approssimativamente un cilindro di altezza* $56m$ *e raggio di base* $8m$*, quante Torri di Pisa servirebbero per contenere tutto il sangue umano presente al mondo?*

L'area di base della Torre è data da $A = \pi r^2 \approx \pi(8m)^2 \approx 2 \cdot 10^2 m^2$. Pertanto il volume di una Torre di Pisa è $V \approx 5.6 \cdot 10^1 m \cdot 2 \cdot 10^2 m^2 = 1.12 \cdot 10^4 m^3$. Occorrono quindi

$$n \approx \frac{3.36 \cdot 10^7 m^3}{1.12 \cdot 10^4 m^3} = 3 \cdot 10^3 = 3000$$

Torri di Pisa per contenere tutto il sangue umano al mondo.

1.2. Calcolo con gli errori.

Le soluzioni degli esercizi dati nella sezione precedente si basano su calcoli approssimati, ma nel risultato finale non ci dicono assolutamente nulla sull'errore finale.

Esercizio 1.3. *Risolvere gli esercizi della sezione precedente, sapendo che i valori (e gli errori) usati sono stati i seguenti:*

Persone al mondo: $(6.0 \pm 0.2)10^9$;
Sangue contenuto in una persona: $(5.6 \pm 0.2)l = (5.6 \pm 0.2)10^{-3}m^3$;
Dimensioni di Piazza dei Miracoli: $(1.00 \pm 0.05)10^2 m$, $(2.0 \pm 0.1)10^2 m$;
Altezza della Torre di Pisa: $(5.6 \pm 0.2)10^1 m$;
Raggio di base della Torre di Pisa: $(8.0 \pm 0.2)m$;
$\pi = 3.125 \pm 0.025$.

Dato che le operazioni che dovremo fare sono tutte con moltiplicazioni e divisioni, siamo interessati agli errori relativi (errore assoluto diviso valore atteso). Gli errori relativi sono:

Persone al mondo: $\frac{0.2\cdot 10^9}{6.0\cdot 10^9} \approx 3.4\%$;
Sangue contenuto in una persona: $\frac{0.2l}{5.6l} \approx 3.6\%$;
Dimensioni di Piazza dei Miracoli: $(\frac{5m}{100m} = 5\%$, $\frac{10m}{200m} = 5\%$;
Altezza della Torre di Pisa: $\frac{2m}{56m} \approx 3.6\%$;
Raggio di base della Torre di Pisa: $\frac{0.2m}{8m} = 2.5\%$;
π: $\frac{0.025}{3.125} = 0.8\%$.

Considerando piccoli questi errori, otteniamo i valori attesi dell'esercizio precedente, e come errori relativi la somma degli errori relativi.

Il sangue umano al mondo è di $3.36 \cdot 10^7 m^3$ con un errore relativo del $3.4\% + 3.6\% = 7\%$, ovvero $(3.36 \pm 0.24) \cdot 10^7 m^3$.

L'area di Piazza dei Miracoli è $2\cdot 10^4 m^2$ con un errore relativo del $5\%+5\% = 10\%$, ovvero $(2.0 \pm 0.2) \cdot 10^4 m^2$.

L'altezza che il sngue umano raggiunge in Piazza dei Miracoli è di $1680m$ con un errore relativo del $7\% + 10\% = 17\%$, ovvero $(1680 \pm 285)m$, ovvero circa quella del monte Amiata.

L'area di base della Torre di Pisa è di $200m^2$ con un errore relativo del $3.6\% + 3.6\% + 0.8\% = 8\%$, ovvero $(200 \pm 16)m^2$.

Il volume della Torre di Pisa è di $1.12 \cdot 10^4 m^3$ con un errore relativo del $3.6\% + 8\% = 11.6\%$, ovvero $(1.12 \pm 0.13)10^4 m^3$.

E infine il numero di Torri necessarie a contenere tutto il sangue umano è 3000 con un errore relativo del $7\% + 11.6\% = 18.6\%$, ovvero 3000 ± 560.

Esercizio 1.4. *Luca e Claudio fanno un viaggio in auto. Luca guida per i primi* $(382 \pm 1)Km$ *(l'incertezza è dovuta al fatto che il contachilometri misura solo i chilometri), poi si ferma e fa il pieno all'auto, spendendo* 23.52 *Euro (la benzina consumata effettivamente corrisponde a* 23.52 ± 0.01 *Euro). Poi guida Claudio per* $(253 \pm 1)Km$. *Il nuovo pieno costa* 15.69 *Euro. Possiamo dire con certezza chi ha percorso più chilometri con un Euro di benzina?*

Per ottenere i chilometri percorsi con un Euro bisogna effettuare una divisione, quindi siamo interessati agli errori relativi. Per Luca

Chilometri percorsi: $\frac{1}{382} \approx 0.262\%$;
Costo benzina consumata: $\frac{0.01}{23.52} \approx 0.043\%$.

Gli errori relativi sono piccoli, pertanto il valor medio è il rapporto dei valori medi ($16.24Km$ con un Euro) con un errore relativo pari alla somma degli errori relativi ($0.262\% + 0.043\% = 0.305\%$), cioè Luca ha fatto $(16.24 \pm 0.05)Km$ con un Euro.

Per Claudio

Chilometri percorsi: $\frac{1}{253} \approx 0.395\%$;
Costo benzina consumata: $\frac{0.01}{15.69} \approx 0.064\%$.

Gli errori relativi sono piccoli, pertanto il valor medio è il rapporto dei valori medi ($16.12Km$ con un Euro) con un errore relativo pari alla somma degli errori relativi ($0.395\%+0.064\% = 0.459\%$), cioè Claudio ha fatto $(16.12\pm 0.07)Km$[1] con un Euro.

I due intervalli non sono disgiunti, pertanto non possiamo affermare con assoluta certezza che Luca ha fatto più strada di Claudio con un Euro.

[1]Sebbene gli errori assoluti iniziali fossero uguali per Luca e per Claudio, gli errori assoluti finali sono diversi!

1.3. **Calcoli con le percentuali.**

Esercizio 1.5. *Stanno per iniziare i saldi e un commerciante disonesto vuole aumentare i prezzi della sua merce di una tale percentuale $p\%$ in modo che quando la sconterà del 10%, 20%, 30% o 50% (in generale del $q\%$) riesca a rivenderla al prezzo iniziale. Qual è questa percentuale?*

In generale, se P è il prezzo iniziale della merce,

$$P\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

è il prezzo dopo l'aumento truffaldino. Il prezzo "scontato" del $q\%$ è

$$P\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right).$$

Imponendo che questo sia uguale al prezzo iniziale e risolvendo, si ottiene[2]:

$$p=\frac{q}{1-\frac{q}{100}}.$$

Le soluzioni corrispondenti agli sconti proposti nell'esercizio sono nella Tabella di pagina 3.

Esercizio 1.6. *Le percentuali non sono utili solamente al commerciante disonesto... Un commerciante onesto compra una grossa partita di merce (n pezzi) ad un prezzo P al pezzo. Suppone di rimanere con il 10% (in generale il $p\%$) di merce invenduta, rovinata o rubata. Se vuole guadagnare il 10% (il $q\%$) dell'investimento iniziale, di che percentuale $r\%$ deve aumentare il prezzo di ogni pezzo?*

Il commerciante suppone di vendere

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right)$$

pezzi, al prezzo di

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

l'uno, ricavando in totale

$$n\left(1-\frac{p}{100}\right)P\left(1+\frac{r}{100}\right).$$

Uguagliando il ricavo al ricavo voluto

$$nP\left(1+\frac{q}{100}\right),$$

e risolvendo rispetto ad r si ottiene[3]

$$r=\frac{p+q}{1-\frac{p}{100}}.$$

[2]Se la percentuale p di sconto è il 100%, la formula indicata non ha senso (denominatore nullo), ma ciò è giusto... Non importa quanto aumento il prezzo... se dopo lo sconto del 100%, lo regalo!

[3]Anche in questo caso la formula ottenuta perde di significato quando la percentuale di merce rubata o invenduta p è il 100%: se non vendo nulla, non importa a quanto lo vendo, non ricaverò niente! Se invece vendo tutto, $p=0$, per guadagnare il $q\%$ devo aumentare il prezzo del $r\%=q\%$.

$p=10\%$	$q\approx 11\%$
$p=20\%$	$q=25\%$
$p=30\%$	$q\approx 43\%$
$p=50\%$	$q=100\%$

TABELLA 1. Soluzione dell'Esercizio 1.5

Le soluzioni corrispondenti ai dati dell'esercizio e ad altre coppie di dati sono presentate in Tabella di pagina 4. Gli esempi evidenziano l'asimmetria della formula rispetto a p e q.

1.4. **Logica.** La logica (matematica) studia la verità, la falsità, la dimostrabilità e la confutabilità di certe proposizioni. La logica ordinaria è una logica a due valori: ogni proposizione o è vera o è falsa (*tertium non datur*, non esiste una terza possibilità). Questo è anche noto come principio del *terzo escluso*, ed fu già enunciato da Aristotele nella sua Metafisica.

Al fine di non incorrere in paradossi, è importantissimo distinguere fra gli oggetti studiati (oggetti matematici, logici, ecc.) e il linguaggio usato per studiarli. Se i due piani si confondono, possono nascere contraddizioni che minacciano l'intera costruzione logica.

Per citare il più famoso:

Questa frase è falsa.

Per il principio del terzo escluso la frase è vera o falsa. Supponiamo sia vera, allora è falsa. Assurdo! Supponiamo sia falsa, allora non è falsa. Assurdo! Paradosso.

Lo stesso paradosso si può ottenere con una coppia di frasi, in cui si elimina (apparentemente) l'autoreferenzialità

1. *La frase successiva è vera.*
2. *La frase precedente è falsa.*

Infatti, per il principio del terzo escluso, la frase 1. o è vera o è falsa. Se è vera, allora è vera anche la 2., e quindi la 1. è falsa, assurdo. Se è falsa, la frase 2. è falsa, dunque la frase 1. è vera, assurdo. Paradosso.

Analogo a questi due è un esempio in cui nessuna frase si riferisce alla prima frase della lista, ma di questa non si sa decidere la verità.

1. *Tutte le frasi successive sono false.*
2. *Tutte le frasi successive sono false.*

...

n. *Tutte le frasi successive sono false.*

...

Esercizio 1.7. *Perché di nessuna delle frasi precedenti si può dire se è vera o falsa?*

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 7 — I-56126 Pisa, Italy
E-mail address: a.saracco@sns.it

$p = 10\%$	$q = 10\%$	$r \approx 22.2\%$
$p = 20\%$	$q = 10\%$	$r = 37.5\%$
$p = 10\%$	$q = 20\%$	$r \approx 33.3\%$
$p = 50\%$	$q = 20\%$	$r = 140\%$
$p = 20\%$	$q = 50\%$	$r = 87.5\%$

Tabella 2. Soluzione dell'Esercizio 1.6