Elementi di Geometria Differenziale

Secondo compitino — 1 giugno 2006

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma\colon[0,1]\to M$ una geodetica di una varietà Riemanniana M, e poniamo $p=\sigma(0)$ e $q=\sigma(1)$. Supponi che non ci siano punti coniugati a p lungo σ. Inoltre, in questo esercizio consideriamo la forma di Morse definita, con la stessa formula, sullo spazio $\mathcal{T}_{\mathrm{t}}(\sigma)$ dei campi vettoriali continui di classe C^∞ a tratti lungo σ.

(i) Dimostra che per ogni $v\in T_qM$ esiste un unico campo di Jacobi $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ tale che $J(0)=O$ e $J(1)=v$.

(ii) Dimostra che per ogni $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ con $J(0)=O$ si ha $I(J,J)=\langle D_1J,J(1)\rangle_q$.

(iii) Dimostra che se $J_1,\,J_2\in\mathcal{J}(\sigma)$ allora $\langle DJ_1,J_2\rangle_\sigma-\langle J_1,DJ_2\rangle_\sigma$ è costante.

(iv) Dato $W\in\mathcal{T}_{\mathrm{t}}(\sigma)$ con $W(0)=O$ sia $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ l'unico campo di Jacobi tale che $J(0)=O$ e $J(1)=W(1)$. Dimostra che $I(J,J)\le I(W,W)$, con uguaglianza se e solo se $W\equiv J$.

2) Siano M e M_0 due varietà Riemanniane con $\dim M_0\ge\dim M$, e $\sigma\colon[0,r]\to M$ e $\sigma_0\colon[0,r]\to M_0$ due geodetiche parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco. Supponi che:

(a) nessun punto del sostegno di σ_0 sia coniugato a $\sigma_0(0)$ lungo σ_0;

(b) per ogni $t\in[0,r]$, $v\in T_{\sigma(t)}M$ e $v_0\in T_{\sigma_0(t)}M_0$ si abbia $K\bigl(\mathrm{Span}\{v,\dot\sigma(t)\}\bigr)\le K_0\bigl(\mathrm{Span}\{v_0,\dot\sigma_0(t)\}\bigr)$, dove K è la curvatura sezionale di M e K_0 quella di M_0.

Prendiamo $J\in\mathcal{J}(\sigma)$ e $J_0\in\mathcal{J}(\sigma_0)$ tali che $\|J(0)\|_{\sigma(0)}=\|J_0(0)\|_{\sigma_0(0)}$, $\langle\dot\sigma(0),D_0J\rangle_{\sigma(0)}=\langle\dot\sigma_0(0),D_0J_0\rangle_{\sigma_0(0)}$, $\|D_0J\|_{\sigma(0)}=\|D_0J_0\|_{\sigma_0(0)}$, e con $J(0)$ tangente a σ e $J_0(0)$ tangente a σ_0 ($J(0)=J_0(0)=O$ è ammesso). Dimostra che allora $\|J(t)\|_{\sigma(t)}\ge\|J_0(t)\|_{\sigma_0(t)}$ per ogni $t\in[0,r]$. (*Suggerimento:* Dimostra che ci si può ricondurre al caso $J\in\mathcal{J}_0(\sigma)$ e $J_0\in\mathcal{J}_0(\sigma_0)$, e che in tal caso basta dimostrare che $d(\|J\|^2/\|J_0\|^2)/dt\ge 0$ sempre.)

3) Siano M e M_0 due varietà Riemanniane con $\dim M_0\ge\dim M$, con curvature sezionali K e K_0 rispettivamente tali che $K_0(\pi_0)\ge K(\pi)$ per qualsiasi coppia di 2-piani $\pi_0\subset TM_0$ e $\pi\subset TM$. Siano $p\in M$, $p_0\in M_0$ e scegliamo $0<\delta\le\min\{\mathrm{inj\,rad}(p),\mathrm{inj\,rad}(p_0)\}$ e un'applicazione lineare $I\colon T_pM\to T_{p_0}M_0$ che conserva il prodotto scalare. Dimostra che per ogni curva $\sigma\colon[0,1]\to B_\delta(p)$ si ha

$$L(\sigma)\ge L(\exp_{p_0}\circ I\circ\exp_p^{-1}\circ\sigma).$$

(*Suggerimento:* scrivi $\sigma=\exp_p\circ\hat\sigma$ e applica l'esercizio precedente.)