Geometria e Topologia Differenziale

Primo compitino A.A. 2007/08

Da consegnare il 5 novembre 2007

Nome e Cognome:

---

1) Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva biregolare (con $n = 2$ o 3). Si dice *evoluta* di γ la curva $\psi: I \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\psi(t) = \gamma(t) + \frac{\mathbf{n}(t)}{\kappa(t)} ,$$

dove $\mathbf{n}(t)$, e $\kappa(t)$ sono rispettivamente il versore normale e la curvatura di γ all'istante t.

Dati R, $a > 0$, siano $\gamma_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2: (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ le curve definite da

$$\gamma_1(t) = (R\cos t, R\sin t, at) , \quad \gamma_2(t) = \left(\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right) .$$

(i) Mostra che γ_1, γ_2 sono curve biregolari.
(ii) Mostra che l'evoluta di γ_1 è un'elica circolare retta, e calcolane raggio e passo.
(iii) Esplicita una parametrizzazione per lunghezza d'arco dell'evoluta di γ_2.

2) Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, e sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva.

(i) Supponi che σ sia regolare, e che le rette tangenti $\{\sigma(t) + u\mathbf{t}(t) \mid u \in \mathbb{R}\}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$, si incontrino tutte in un punto. Mostra che il sostegno di σ è contenuto in una retta.
(ii) Supponi che σ sia biregolare, e che le rette normali $\{\sigma(t) + u\mathbf{n}(t) \mid u \in \mathbb{R}\}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$, si incontrino tutte in un punto. Mostra che il sostegno di σ è contenuto in una circonferenza.
(iii) Dimostra che non esiste alcuna curva σ biregolare le cui rette binormali $\{\sigma(t) + u\mathbf{b}(t) \mid u \in \mathbb{R}\}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ si incontrino tutte in un punto.

3) Siano σ_0, $\sigma_1: [a, b] \to D \setminus \{0\}$ due curve chiuse continue, dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un disco aperto centrato nell'origine. Mostra che σ_0 e σ_1 hanno lo stesso indice di avvolgimento intorno all'origine se e solo se esiste un'omotopia di curve chiuse $\Phi: [a, b] \times [0, 1] \to D \setminus \{0\}$ tra σ_0 e σ_1.

4) Sia $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare chiusa, e sia $\tilde{\mathbf{n}} : [a, b] \to S^1$ il suo versore normale orientato. Calcola l'indice di rotazione di σ in funzione del grado dell'applicazione $\tilde{\mathbf{n}}$.