Geometria e Topologia Differenziale

Primo scritto — 26 gennaio 2009

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon (0,\pi/2) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia $\gamma\colon (0,\pi/2) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \sigma(t) - \mathbf{b}(t) ,$$

dove $\mathbf{b}\colon (0,\pi/2) \to \mathbb{R}^3$ è il versore binormale di σ.

(i) Dimostra che γ è sempre una curva regolare.

(ii) Dimostra che la parametrizzazione data di γ è rispetto alla lunghezza d'arco se e solo se σ è una curva piana.

(iii) Calcola la curvatura di γ, in termini della curvatura κ e della torsione τ di σ, e dimostra che γ è biregolare in tutti i punti in cui γ'' non si annulla.

(iv) Supponi che la curva σ abbia torsione $\tau \equiv 1$ e curvatura κ data da

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t\right) ;$$

dimostra che in questo caso la curva γ è piana.

2) Dato $\varepsilon \in (0,1/3)$, sia $\varphi\colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right) .$$

(i) Supponendo che l'immagine S di φ sia una superficie regolare, calcolane curvatura Gaussiana e curvatura media.

(ii) *Facoltativo:* dimostra che S è una superficie regolare quando ε è abbastanza piccolo.

3) Sia S l'ellissoide centrato nell'origine con semiassi lungo x, y, z di lunghezza rispettivamente pari a 1, 3 e 1. Sia T l'intersezione di S con il bordo dell'ottante $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

(i) Dimostra che T è un triangolo geodetico.

(ii) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana K su T.

(iii) Trova infiniti poligoni geodetici in S su cui l'integrale della curvatura Gaussiana sia pari a 2π.

(iv) Dimostra che due poligoni geodetici in S su cui l'integrale della curvatura Gaussiana è pari a 2π si intersecano sempre.