Geometria e Topologia Differenziale

Secondo scritto dell'A.A. 2003-04 — 15 luglio 2004

Nome e Cognome:

---

1) Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ dato da
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 + 3y^2 = 1\}.$$
Dimostra che C è il sostegno di una curva regolare, e calcolane la curvatura.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + 3y^2\}.$$

(i) Dimostra che S è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determina i punti p di S nei quali il versore normale a S è parallelo al vettore $(0, 16, 1)$, e in tali punti calcola la curvatura Gaussiana di S.

3) Sia $\xi\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ dato da
$$\xi(x, y, z) = \big(1 - x(x + z), -y(x + z), 1 - z(x + z)\big).$$

(i) Dimostra che ξ è un campo vettoriale tangente a S^2.
(ii) Dimostra che ξ ha esattamente due punti singolari P_+, $P_- \in S^2$.
(iii) Dimostra che $\mathrm{Ind}_{P_+}(\xi) = \mathrm{Ind}_{P_-}(\xi)$ e calcola $\mathrm{Ind}_{P_+}(\xi)$. (*Suggerimento:* usa la proiezione stereografica.)