

Geometria e Topologia Differenziale

Terzo scritto — 24 giugno 2008

Nome e Cognome:

Anno d'immatricolazione:

1) Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponi che la distanza dell'origine dalla retta normale a $\sigma(s)$ sia uguale a 1 per ogni $s \in I$.

- (i) Mostra che $\langle \sigma(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ per ogni $s \in I$.
- (ii) Mostra che σ è biregolare.
- (iii) Detta $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura di σ , mostra che $\dot{\kappa}(s) = -\kappa^3(s)$ per ogni $s \in I$, e deducine che l'applicazione $s \mapsto \kappa^{-2}(s)$ ha derivata costante.
- (iv) Supponi ora $0 \in I$ e $\kappa(0) = 1$. Mostra che

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2s+1}}$$

per ogni $s \in I$ (in particolare, $I \subseteq (-1/2, \infty)$).

2) Considera l'applicazione $\varphi: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u + uv),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, di cui φ è una parametrizzazione globale.
- (ii) Calcola i coefficienti metrici e i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione φ .
- (iii) Calcola la curvatura di Gauss di S , ed osserva che essa è ovunque non positiva.

3) Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^2 = 1\}$.

- (i) Mostra che Σ è una superficie regolare orientabile chiusa, e determina un campo di versori normali $N: \Sigma \rightarrow S^2$.

Nel seguito, con *piano verticale* intenderemo un piano vettoriale (cioè passante per l'origine) che contenga l'asse delle z .

- (ii) Determina tutti i punti $P \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ tali che $\text{Span} \langle P, N(P) \rangle$ sia un piano verticale.
- (iii) Mostra che l'intersezione di Σ con un qualsiasi piano verticale è sostegno di una curva regolare.
- (iv) Determina i piani verticali la cui intersezione con Σ sia il sostegno di una geodetica di Σ .