Geometria e Topologia Differenziale

Quarto scritto A.A. 2004/05 — 5 dicembre 2005

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ e torsione τ mai nulle, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Mostra come ricavare le funzioni κ e $|\tau|$ conoscendo solamente il versore binormale $\mathbf{b}\colon I \to \mathbb{R}^3$ di σ.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 9y^2 - z = 0\}.$$

Mostra che S è una superficie regolare e calcola la curvatura Gaussiana, la curvatura media e le curvature principali di S nel punto $p_0 = (1, 0, 1)$.

3) Sia S il toro di rotazione ottenuto ruotando la circonferenza di equazione $(x-3)^2 + z^2 = 1$ attorno all'asse z. Per ogni $p \in S$ indichiamo con $\pi_p\colon \mathbb{R}^3 \to T_pS$ la proiezione ortogonale su T_pS; se $N\colon S \to S^2$ è una mappa di Gauss per S, allora $\pi_p(v) = v - \big(v, N(p)\big)N(p)$. Dato il vettore $\partial/\partial x = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, sia $X\colon S \to TS$ il campo di vettori tangenti

$$X(p) = \pi_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ottenuto proiettando ortogonalmente il versore $\partial/\partial x$ sul piano tangente in $p \in S$ a S.

(i) Determina i punti singolari di X.

(ii) Calcola la somma degli indici dei punti singolari di X su S.