Geometria e Topologia Differenziale

Quarto scritto — 17 luglio 2008

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro reale, e considera la curva $\sigma_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma_a(t) = (\cos t, \sin(t - a), at).$$

(i) Mostra che σ_a è regolare per ogni valore di a.
(ii) Mostra che σ_a è biregolare se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $a \neq \pi/2 + k\pi$.
(iii) Nei casi in cui σ_a sia biregolare, calcolane curvatura e torsione.
(iv) Determina i valori di a per cui σ_a sia contenuta in un piano.

2) Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u, v) = (\cos u, e^v \sin u, v),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sia inoltre $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (0, e^t, t)$.
(i) Mostra che S è una superficie regolare, un cui atlante è dato da $\varphi|_{(0,2\pi)\times\mathbb{R}}$ e $\varphi|_{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}$.
(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S (rispetto alla parametrizzazione φ).
(iii) Mostra che la curvatura Gaussiana di S è ovunque negativa.
(iv) Mostra che γ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in S, e che una riparametrizzazione di γ a velocità costante è una geodetica di S.

3) Supponi che una superficie regolare S ed un piano P siano tangenti lungo il sostegno di una curva regolare γ. Mostra che tutti i punti del sostegno di γ sono parabolici o planari.