Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Terzo scritto A.A. 2010/11 — 28 aprile 2011

Nome e Cognome:

---

1) Date una $\mathbb{K}$-algebra A e uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, sia $L\colon V \to A$ una applicazione $\mathbb{K}$-lineare tale che $\big(L(v)\big)^2 = 0$ per ogni $v \in V$. Dimostra che

(i) ponendo $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto L(v_1) \cdots L(v_p)$ ed estendendo per $\mathbb{K}$-linearità si definisce un'applicazione $\bigwedge^p L\colon \bigwedge^p V \to A$;

(ii) esiste un unico morfismo di algebre $\bigwedge L\colon \bigwedge V \to A$ tale che $\bigwedge L(v) = L(v)$ per ogni $v \in V$, cioè tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[dr] & A \\ & \bigwedge V \arrow[u, "\bigwedge L"'] \end{tikzcd}$$

commuti.

2) Sia $n \geq 2$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Posto $M = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, dimostra che

$$H^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0,\, n-1, \\ O & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3) Date due connessioni lineari ∇ e $\tilde{\nabla}$ su una varietà M, siano B, S, $A\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ le applicazioni definite da $B(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$,

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}\big(B(X,Y) + B(Y,X)\big) \quad \text{e} \quad A(X,Y) = \frac{1}{2}\big(B(X,Y) - B(Y,X)\big)\,.$$

Indichiamo inoltre con τ la torsione di ∇, e con $\tilde{\tau}$ la torsione di $\tilde{\nabla}$. Dimostra che:

(i) B, S, $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$;

(ii) $2A = \tilde{\tau} - \tau$;

(iii) le seguenti affermazioni sono equivalenti:

  (a) ∇ e $\tilde{\nabla}$ hanno le stesse geodetiche (cioè ogni geodetica di ∇ è anche geodetica di $\tilde{\nabla}$, e viceversa);

  (b) $B(v,v) = O$ per ogni $v \in TM$;

  (c) $S \equiv O$;

  (d) $B \equiv A$.

(iv) ∇ e $\tilde{\nabla}$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione se e solo se $\nabla \equiv \tilde{\nabla}$;

(v) esiste un'unica connessione simmetrica ∇^* che ha le stesse geodetiche di ∇.