

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B  
PROF. MARCO ABATE

SESTO SCRITTO

10 febbraio 2010

Nome e cognome

Matricola

**ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.**

**ISTRUZIONI:** Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

1. PARTE I

**Esercizio 1.1.** Possono esistere due eventi  $A$  e  $B$  di uno stesso spazio degli eventi  $\Omega$  per cui si abbia  $p(A|B) < p(A)$ ?

**Esercizio 1.2.** Posto  $f(x) = \log_2(2^x - 4)$ , determina il dominio di  $f$  e risolvi la disequazione  $f(x) \geq 0$ .

**Esercizio 1.3.** Calcola la derivata della funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(x) = \sin(\log(1 + x^2)) .$$

## 2. PARTE II

**Esercizio 2.1.** Un'urna contiene 3 palline bianche, 6 palline nere e 9 palline rosse.

- (i) Qual è la probabilità di estrarre (scegliendo a caso) una pallina nera?
- (ii) Qual è la probabilità che in 4 estrazioni con rimbussolamento tu estragga una e una sola pallina nera?
- (iii) Qual è la probabilità che in 4 estrazioni con rimbussolamento tu estragga almeno una pallina nera?
- (iv) Quante sono le possibili sequenze di 4 estrazioni con rimbussolamento che contengono esattamente 2 palline nere? (Per esempio, “bianca-nera-rossa-nera” e “nera-nera-bianca-rossa” sono due di queste sequenze).

**Esercizio 2.2.** Uno studio sulla crescita dei cavallucci marini dell'Oceano Indiano ha misurato la lunghezza media (in centimetri) di un cavalluccio maschio in funzione dell'età (in mesi), ottenendo le seguenti coppie di dati: (1, 3), (2, 7), (4, 10), (6, 12), dove l'ascissa indica l'età e l'ordinata la lunghezza. Determina l'equazione della retta che meglio interpola questi dati. Si tratta di una buona interpolazione?

**Esercizio 2.3.** Un modello per lo studio delle onde che si formano al confine fra due fluidi di densità  $\rho_1 > \rho_2$  (per esempio acqua e aria) quando il fluido meno denso si muove con velocità costante  $v$  (per esempio a causa del vento) prevede che la lunghezza d'onda critica per onde stabili  $\lambda$  dipenda dal rapporto  $x = \rho_1/\rho_2$  fra le densità secondo la legge

$$\lambda(x) = \frac{2\pi v^2 x}{g(x^2 - 1)},$$

dove  $g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$  è l'accelerazione di gravità.

- (i) Studia la funzione  $\lambda$  (per tutti i valori di  $x \in \mathbb{R}$  per cui è definita) quando  $v = 10 \text{ m/s}$ .
- (ii) Sempre supponendo  $v = 10 \text{ m/s}$ , determina per quale valore di  $x = \rho_1/\rho_2$  la lunghezza d'onda critica  $\lambda(x)$  è 3000 m.
- (iii) Supponendo invece  $x = 2$ , trova quale valore deve avere la velocità  $v$  del vento perché la lunghezza d'onda critica sia 3000 m.