ANNO ACCADEMICO 2013–14

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
QUINTO SCRITTO

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

2 febbraio 2015

Nome e cognome____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{k \sin^2 x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è continua in $x = 0$? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Calcola la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{x^4+1} \, .$$

Esercizio 3. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \, .$$

SECONDA PARTE

Esercizio 4. (i) Trova una funzione periodica f definita su tutto $\mathbb{R}$ tale che $f(0) = f(\pi/4) = 0$.

(ii) Trova una funzione pari f definita su tutto $\mathbb{R}$ e tale che $f(\mathbb{R}) = [1, 3[$.

(iii) Può esistere una funzione continua, dispari, definita su tutto $\mathbb{R}$, strettamente crescente e avente come asintoto orizzontale a $+\infty$ la retta $y = 0$? Se sì trovane una; se no, spiega perché.

(iv) Può esistere una funzione continua, dispari, definita su tutto $\mathbb{R}$, strettamente crescente e avente come asintoto orizzontale a $+\infty$ la retta $y = 1$? Se sì trovane una; se no, spiega perché.

Esercizio 5. Studiando la crescita della popolazione di fringuelli nel parco di Massaciuccoli, giungi alla conclusione che il numero N di fringuelli può essere rappresentato nel tempo dalla funzione

$$N(t) = 40 + 20\frac{e^t - 1}{e^t + 1} .$$

(i) Studia la funzione N (anche per tempi negativi).

(ii) Trova per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione N soddisfa l'equazione differenziale

$$40N'(t) = (20 - N)(N - a) .$$

(iii) Secondo questo modello, ci sono elementi nel parco di Massaciuccoli che limitano la crescita della popolazione di fringuelli?

Esercizio 6. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e in tal caso trova le soluzioni) il sistema lineare

$$\begin{cases} x + (\alpha - 1)y + z = 1 \ , \\ 2x + \alpha y + \alpha z = -\alpha \ , \\ \alpha x + 2y + 2(\alpha - 1)z = 4 - \alpha \ . \end{cases}$$