

Dimostrazioni e confutazioni

Alberto Abbondandolo
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

20 Luglio 2006

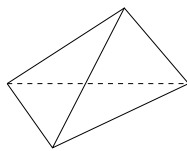
Nell'estate del 2006 sono stato invitato a tenere una lezione di matematica per il Corso di Orientamento Universitario che annualmente la Scuola Normale organizza a Colle Val'Elsa. Si trattava di una lezione rivolta a studenti del penultimo anno delle scuole superiori, e decisi basarla su "Dimostrazioni e confutazioni", lo splendido saggio di Imre Lakatos [2]. Una non piccola parte del fascino che aveva esercitato su di me questo libro è costituita dalla sua forma: si tratta di un dialogo tra un gruppo di studenti sulla dimostrazione della formula di Eulero. Con il più classico degli artifici della divulgazione filosofica, Lakatos mette in bocca agli studenti le idee dei matematici che nel diciannovesimo secolo si sono occupati di questo problema ed articola la sua teoria sulla logica sottostante alla scoperta matematica.

Né i contenuti storici né quelli filosofici si addicevano alla mia lezione, ma l'idea di utilizzare parte dell'analisi di Lakatos per raccontare ai ragazzi cosa sia una dimostrazione, a cosa serva, e come lavorino i matematici mi sembrava interessante. Quello che segue è un resoconto abbastanza fedele di come si è articolata la discussione. Sono stato piacevolmente sorpreso di sentire, tra le tante domande che gli studenti ponevano durante la lezione, alcuni degli interrogativi sollevati dagli studenti della classe immaginaria di Lakatos.

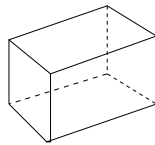
Alla fine della lezione ho proposto un problema di robotica legato alla formula di Eulero (devo l'idea di questo problema a William Thurston e Jeffrey Weeks [3]). L'ultimo paragrafo di queste note contiene la soluzione di questo problema.

1 Dimostrazione, I

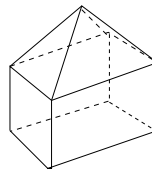
In un poligono il numero dei lati è uguale al numero dei vertici: ogni triangolo ha tre lati e tre vertici, ogni quadrilatero ha quattro lati e quattro vertici, eccetera. La verità di questa affermazione è talmente evidente che non sentiamo la necessità di una dimostrazione. La situazione si complica se dai poligoni passiamo ai poliedri. Innanzitutto ci sono tre diversi tipi di enti che potremmo voler contare: un poliedro ha vertici, spigoli e facce. C'è una qualche relazione tra il numero V dei vertici, il numero S degli spigoli e il numero F delle facce? Qua non sembra esserci una risposta evidente, converrà guardare qualche esempio. In figura 1 sono riportati quattro poliedri e per ciascuno sono indicati il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce.



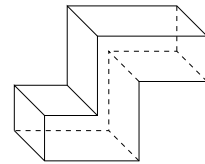
$V = 4, S = 6, F = 4$



$V = 8, S = 12, F = 6$



$V = 5, S = 9, F = 5$



$V = 16, S = 24, F = 10$

Figura 1: Alcuni poliedri.

È stato forse esaminando un buon numero di casi come questi che nel 1758 Eulero è arrivato a concludere che per ogni poliedro vale la relazione

$$V - S + F = 2.$$

Effettivamente questa formula vale per i quattro poliedri visti sopra. Potremmo guardare centinaia di altri esempi, accorgerci che in tutti i casi la formula vale, ma in questo modo non avremmo mai la certezza che la formula valga per *tutti* i poliedri. Siamo di fronte ad una situazione tipica in matematica: abbiamo un'affermazione ($V - S + F = 2$) che riguarda un'infinità di oggetti (tutti i poliedri), riusciamo a verificarne la verità caso per caso, ma questo non ci assicura che non abbiamo tralasciato qualche caso per cui l'affermazione è falsa. Per ora l'affermazione è soltanto una *congettura*, la congettura di Eulero; per attribuirle lo status di *teorema* dobbiamo esibire un argomento, concatenando una serie di affermazioni più elementari, che ci assicuri della validità della congettura in tutti i casi. In altre parole dobbiamo fornire una *dimostrazione*. La dimostrazione serve dunque a rendere certa un'affermazione. Vedremo più avanti che questa funzione di verifica è soltanto uno degli scopi, e nemmeno il più importante, della dimostrazione.

Cominciamo con il seguire la dimostrazione di Cauchy del 1813. Il ragionamento consiste di una serie di costruzioni (lemmi), in cui il problema viene ridotto a forme via via più semplici, fino ad arrivare ad un'affermazione evidentemente vera.

LEMMA 1. Assumendo che la superficie del poliedro sia fatta di gomma, togliamo una faccia e deformiamo la superficie rimasta fino a stenderla su un piano. Nella figura ottenuta V e S saranno immutati, mentre F sarà ridotto di 1 poiché abbiamo tolto una faccia (il primo disegno in figura 2 rappresenta questa costruzione nel caso in cui il poliedro sia un cubo).

Quindi ci basta dimostrare che per tale figura $V - S + F = 1$.

LEMMA 2. Tracciando delle diagonali, dividiamo ogni faccia non già triangolare in triangoli. Per ogni diagonale che tracciamo V non varia, S aumenta di 1 (la diagonale tracciata), F aumenta di 1 (la diagonale divide la faccia in due). Quindi la quantità $V - S + F$ non varia: S e F aumentano dello stesso numero, ma nella formula compaiono con segni opposti (secondo disegno in figura 2).

Perciò ci basta dimostrare che per la nuova figura $V - S + F = 1$.

LEMMA 3. Eliminiamo i triangoli uno ad uno, togliendone sempre uno esterno. Per eliminare un triangolo esterno le possibilità sono due:

- (i) si elimina uno spigolo: S e F diminuiscono di 1, quindi $V - S + F$ non varia (terzo disegno in figura 2).
- (ii) si eliminano due spigoli e un vertice: F e V diminuiscono di 1, S diminuisce di 2, ancora $V - S + F$ non varia (quarto disegno in figura 2).

Dunque eliminando i triangoli uno ad uno partendo da quelli esterni, il valore di $V - S + F$ resta invariato.

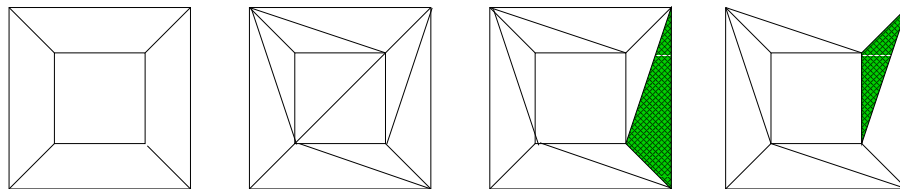


Figura 2: Dimostrazione del teorema di Eulero per un cubo.

Alla fine restiamo con un solo triangolo, per cui $V = 3$, $S = 3$, $F = 1$. Quindi si ha $V - S + F = 1$, che è quanto volevamo dimostrare.

Il teorema di Eulero è dimostrato: lemmi la cui verità è evidente o deducibile da un facile ragionamento sono legati tra loro da catene di implicazioni logiche che portano alla conclusione. Si noti che non abbiamo distinto nettamente l'enunciato del lemma dal pur facile ragionamento che ad esso conduce. Spesso in matematica alcuni lemmi evidenti non lo sono affatto e necessitano a loro volta di una vera e propria dimostrazione, eventualmente suddivisa in altri lemmi.

Prima di proseguire è forse opportuna un'osservazione sul rigore: al matematico moderno questa dimostrazione potrebbe non sembrare rigorosa, mentre i contemporanei di Cauchy non ebbero difficoltà ad accettarla. Il concetto di rigore infatti varia da epoca ad epoca e, soprattutto, da settore a settore. Pur essendo formulata con il linguaggio della geometria euclidea, la formula di Eulero appartiene ad un campo della matematica, la *topologia*, che le idee di Eulero stavano contribuendo a creare. In un settore giovane manca spesso il formalismo necessario a produrre dimostrazioni rigorose e si usano immagini un po' vaghe come "deformare una superficie di gomma". Solo in un secondo tempo una migliore comprensione ed una crescente complessità inducono i matematici a costruire un linguaggio adeguato, così che in un settore maturo la maggior parte dei problemi può essere risolta con quel rigore per cui la matematica è famosa. Anche in matematica, in qualche misura, è valida la distinzione di Kuhn [4] tra periodi di rivoluzioni scientifiche, in cui senza preoccuparsi delle regole si creano nuovi *paradigmi*, e periodi di scienza normale, in cui regole precise ed accettate da tutti permettono di risolvere *rompicapo*, anche molto complicati e profondi.

2 Confutazione, I

Il lemma 3 è falso! Supponiamo infatti di essere partiti da un cubo, di aver tolto una faccia, di averlo deformato sul piano e di aver diviso le facce in triangoli, come nel secondo disegno di Figura 2. Il lemma 3 ci lascia liberi di scegliere l'ordine con cui eliminiamo i triangoli, a patto di togliere sempre un triangolo esterno, quindi supponiamo di aver tolto 8 triangoli, seguendo l'ordine indicato in figura 3 a sinistra. Ci troveremo nella situazione a destra: quale che sia il triangolo che decidiamo di eliminare, non cadiamo in nessuno dei casi previsti dal lemma 3.

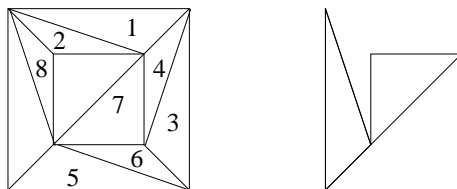


Figura 3: Ordine di eliminazione dei triangoli.

Effettivamente la formulazione che abbiamo dato di questo lemma non è completa: occorre emendarla, prevedendo anche un terzo caso, e precisamente:

- (iii) si eliminano tre spigoli, due vertici e una faccia: S diminuisce di 3, V diminuisce di 2, S diminuisce di 1, ancora $V - S + F$ non cambia.

Non è stato difficile correggere l'errore. Si trattava più che altro di un'incompletezza della dimostrazione che non compromette la conclusione del lemma 3: *eliminando i triangoli uno ad uno partendo da quelli esterni, il valore di $V - S + F$ resta invariato.*

Il lemma 3 è ancora falso!! Supponiamo di aver seguito l'ordine indicato in figura 4, in modo da essere arrivati alla figura a destra e di voler togliere adesso il triangolo A , che sembrerebbe esterno. Per fare ciò si eliminano due spigoli e una faccia: quindi S cala di 2, F cala di 1, mentre V non varia. In questo caso $V - S + F$ cambia e precisamente aumenta di 1.

Questa volta non possiamo correggere l'errore aggiungendo un caso in più, visto che è la conclusione stessa del lemma ad essere contraddetta: non è vero che eliminando i triangoli uno ad uno partendo da quelli esterni, il valore di $V - S + F$ resta invariato.

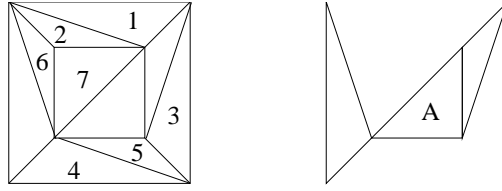
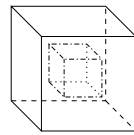


Figura 4: Nuovo ordine di eliminazione dei triangoli.

Ovviamente il problema sta nell'uso dell'aggettivo *esterno*: se vogliamo che la nostra linea dimostrativa funzioni, non siamo autorizzati a considerare esterno, e quindi eliminare, il triangolo *A*. Alla parola *esterno*, come a molte delle parole che la matematica prende in prestito dal linguaggio comune, dovremmo dare un significato ben preciso adatto al nostro contesto geometrico, se non vogliamo dar adito ad interpretazioni ambigue. Come vedremo più avanti, dare definizioni non ambigue non è così facile come potrebbe sembrare, quindi scegliamo un approccio diverso. Modifichiamo l'enunciato del lemma 3 nel seguente: *è possibile eliminare i triangoli uno ad uno in modo che il valore di $V - S + F$ resti invariato*. Non stiamo perciò dicendo che in qualunque ordine decidiamo di eliminare i triangoli la quantità $V - S + F$ non varia, ma semplicemente che c'è un modo di farlo in per cui $V - S + F$ non varia. Abbiamo così eliminato l'impegnativo termine *esterno* dall'enunciato, che adesso sembra plausibile. Infatti questo enunciato è implicato dal seguente: *è possibile eliminare uno ad uno i triangoli in modo da ricadere ogni volta nel caso (i) oppure (ii)*. Si noti che guadagnamo anche una piccola semplificazione, visto che non c'è bisogno di considerare il caso (iii). Quest'ultima affermazione necessiterebbe a sua volta di una dimostrazione, ma per i nostri scopi può essere considerata sufficientemente evidente¹.

3 Confutazione, II

Il teorema di Eulero è falso! Si consideri infatti il solido ottenuto togliendo un cubo centrale da un cubo più grande (vedi figura 5): si tratta di un poliedro cavo, con 16 vertici, 24 spigoli e 12 facce, per cui $V - S + F = 4$. Esistono perciò poliedri per cui non vale la formula di Eulero. Questa volta non si tratta di un vizio nella dimostrazione: abbiamo trovato quello che si dice un *controesempio*, che mette in discussione la verità del teorema.



$$V = 16, S = 24, F = 12$$

Figura 5: Primo controesempio.

Si potrebbe sostenere che questo non è un vero controesempio: si tratta infatti di due cubi disgiunti e il fatto che essi costituiscano il bordo di un medesimo solido non ci autorizza a considerarli come un unico poliedro. Il problema nasce dal fatto che non ci siamo preoccupati di definire cosa esattamente sia un poliedro. L'oggetto in figura 5 è effettivamente un controesempio al teo-

¹C'è anche un'altra possibilità: potremmo accettare di eliminare un triangolo che sta nella posizione di *A*, a costo di complicare la linea dimostrativa. Ogni qual volta eliminiamo un siffatto triangolo, che per semplicità definiamo *intermedio*, $V - S + F$ aumenta di 1, quindi occorre dimostrare che $V - S + F = n + 1$, dove n è il numero di triangoli intermedi eliminati. Ma ogni volta che eliminiamo un triangolo intermedio, dividiamo un componente della figura in due componenti, quindi se abbiamo eliminato n triangoli intermedi, alla fine della costruzione troviamo $n + 1$ triangoli disgiunti, per cui effettivamente risulta $V - S + F = n + 1$.

rema di Eulero se, insieme allo stesso Eulero e, dopo di lui, a Legendre, accettiamo la seguente definizione²:

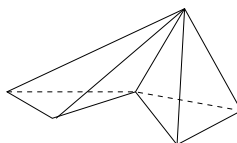
DEFINIZIONE 1. Un poliedro è un solido delimitato da facce poligonali.

Ci sono però validi motivi per rifiutare questa definizione: un poliedro è prima di tutto una superficie, il solido che essa delimita non è rilevante. Converrà pertanto adottare una definizione diversa:

DEFINIZIONE 2. Un poliedro è una superficie formata da un sistema di poligoni.

In figura 5 vediamo due superfici, quindi due poliedri, per ciascuno dei quali la formula di Eulero vale.

Il teorema di Eulero è ancora falso!! Secondo la definizione 2, l'oggetto di figura 6 è un poliedro, però $V - S + F = 3$.



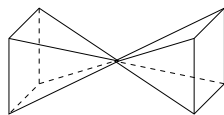
$$V = 6, S = 11, F = 8$$

Figura 6: Secondo controesempio.

Occorrerà correre ai ripari negando a questo controesempio lo status di poliedro: in fondo quelle 4 facce adiacenti al medesimo spigolo sembrano una stranezza eccessiva. Proponiamo quindi la seguente:

DEFINIZIONE 3. Un poliedro è una superficie formata da un sistema di poligoni disposti in modo che in ogni spigolo si incontrino due e soltanto due di essi (formando un diedro).

Il mostro di figura 6 è stato domato, ma ancora non ci siamo: l'oggetto di figura 7 è un poliedro secondo la definizione 3, eppure $V - S + F = 3$.



$$V = 9, S = 16, F = 10$$

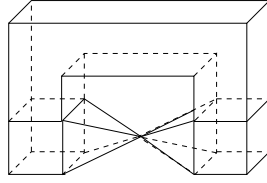
Figura 7: Terzo controesempio.

Qua il problema sembra essere costituito da quel vertice centrale dove le facce si incontrano in modo non proprio ortodosso. La definizione che nel 1932 Hilbert e Cohn-Vossen adottano nel loro "Geometria intuitiva" (vedi [5], paragrafo 44) sembra aver ragione di questa patologia:

DEFINIZIONE 4. Un poliedro è una superficie formata da un sistema di poligoni disposti in modo che in ogni spigolo si incontrino due e soltanto due di essi (formando un diedro), e che inoltre sia possibile arrivare da qualunque poligono del sistema a qualunque altro oltrepassando degli spigoli, ma senza passare dai vertici.

Però è facile modificare l'oggetto di figura 7 in modo da soddisfare le richieste di questa definizione, pur mantenendo la stessa patologia: nel poliedro in figura 8 è senz'altro possibile congiungere due punti qualsiasi senza passare dai vertici.

²Questa è anche la definizione che riporta l'Enciclopedia Italiana Treccani.



$$V = 25, S = 48, F = 24$$

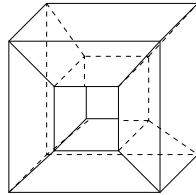
Figura 8: Quarto controesempio.

In questo caso $V - S + F = 3$, quindi la formula di Eulero non vale³.

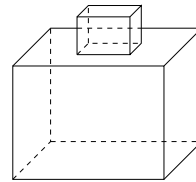
Questo gioco potrebbe andare avanti a lungo: definizioni sempre più elaborate e controesempi sempre più ingegnosi potrebbero alternarsi più volte, fino a produrre mostruosità come la definizione di *ordinary polyhedron* che riempie 45 righe dell'Enciclopedia Britannica (edizione del 1962). C'è una vaga possibilità che la definizione così prodotta individui una classe di oggetti per cui il teorema di Eulero vale, ma l'utilità di una definizione tanto complicata non sarebbe di molto superiore a dire che un poliedro è un insieme di vertici, spigoli e facce per cui $V - S + F = 2$.

4 Dimostrazione, II

Prima di procedere, esaminiamo ancora due controesempi alla formula di Eulero: la *cornice* e la *torretta* di figura 9.



$$V = 16, S = 32, F = 16$$



$$V = 16, S = 24, F = 11$$

Figura 9: La cornice e la torretta.

Per la cornice $V - S + F = 0$, mentre per la torretta $V - S + F = 3$. Assumiamo la posizione di considerare la cornice e la torretta veri poliedri. Di conseguenza il teorema di Eulero non può valere per tutti i poliedri, ma solo per una sottoclasse, che ci proponiamo di determinare.

Diversamente dai poliedri più convenzionali, la cornice ha un foro, e la torretta ha una faccia con un buco. Sospettando che siano queste le caratteristiche comuni ai poliedri per cui la formula di Eulero non vale, potremmo cercare di coniare definizioni che rendano rigorosa l'idea intuitiva di poliedro senza fori (potremmo chiamarlo poliedro *semplice*) e faccia senza buchi (potremmo

³Nel citato "Geometria intuitiva", Hilbert e Cohn-Vossen adottano la Definizione 4 e definiscono l'ordine di connessione di un poliedro come il numero h per cui è possibile trovare $h - 1$ ma non h spezzate formate da spigoli, in modo che il poliedro non sia diviso in due parti. Queste spezzate non devono autointersecarsi, la prima di esse deve essere chiusa, ed ognuna deve congiungere due punti della precedente. Per un poliedro con ordine di connessione h , enunciano la formula $V - S + F = 3 - h$. All'oggetto di figura 7 la definizione di Hilbert e Cohn-Vossen non concede la dignità di poliedro. Quello di figura 8 è invece accettato, ed il suo ordine di connessione risulta essere 2, in accordo con la formula. Ovviamente questo avviene perché la definizione degli autori di "Geometria intuitiva" è tutt'altro che intuitiva: essa nasce da un secolo di ricerca matematica, in cui si è chiarito come le singularità di dimensione 1 (gli spigoli che non sono comuni ad esattamente due facce) siano da evitare, mentre quelle di dimensione 0 (i vertici come quello di figura 7 e 8) siano accettabili fintanto che prese assieme esse non sconnettano il poliedro. Guidati solamente dall'intuizione non avremmo motivo per scartare l'oggetto di figura 7 ed accettare quello di figura 8.

chiamarla faccia *semplicemente connessa*). Così facendo ripeteremmo però l'errore metodologico che ci ha portato all'impasse nel paragrafo precedente: guidati solamente dalla nostra intuizione di cosa significhi non avere né fori né buchi, produrremmo definizioni inutilmente complicate, senza alcuna garanzia che queste resistano all'attacco di qualche nuovo controesempio.

Il nostro errore sta nell'aver dimenticato lo strumento dal quale eravamo partiti: la dimostrazione. Nel primo paragrafo abbiamo dato una dimostrazione del teorema di Eulero, non ineccepibile nella forma e nemmeno nella sostanza, visto che numerosi controesempi ci hanno mostrato che la formula non può avere la validità universale attribuitale inizialmente. L'argomento però sembrava avere una sua ragionevolezza, semmai conteneva delle *ipotesi nascoste*, che un'analisi più approfondita potrebbe svelare e trasformare in definizioni. Vediamo come.

La cornice e la torretta, essendo controesempi alla validità del teorema, devono violare almeno uno dei lemmi che costituiscono la dimostrazione. La cornice viola il lemma 1: non è vero che dopo aver tolto una faccia possiamo deformare la superficie rimasta fino a stenderla su un piano. Lo stesso lemma è violato dai controesempi del paragrafo 3. Quindi non tutti i poliedri godono della proprietà espressa dal lemma 1, e cambiando punto di vista possiamo incorporare questa proprietà in una definizione:

DEFINIZIONE 4. Un poliedro si dice *semplice* se, tolta una sua faccia, può essere deformato sul piano.

Questa definizione di poliedro semplice corrisponde al concetto intuitivo di poliedro senza fori, ed ha il grosso vantaggio di essere stata generata da una dimostrazione: il lemma 1, punto di partenza della dimostrazione della formula di Eulero, vale per tutti e soli i poliedri semplici. È facile trovare anche formulazioni equivalenti, come ad esempio dire semplice un poliedro che sia trasformabile in una sfera mediante una deformazione continua.

La torretta viola invece il lemma 2: esso afferma che ogni diagonale tracciata su una figura la divide in due parti, affermazione falsa nel caso di una delle facce della torretta, dove l'aggiunta di una diagonale non produce nuove facce (figura 10).

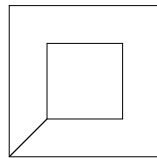


Figura 10: Una sola diagonale non divide la faccia in due.

È questa la proprietà che deve essere incorporata in una definizione:

DEFINIZIONE 5. Una faccia si dice *semplicemente connessa* se ogni diagonale la divide in due parti.

Il lemma 2 diventa così una tautologia se enunciato nel caso di facce semplicemente connesse. Il lemma 3, emendato grazie alla discussione del paragrafo 2, è sostanzialmente corretto (anche se andrebbe dimostrato). L'analisi di una dimostrazione, ancorché poco rigorosa e viziata da ipotesi nascoste, ci ha condotto ad una formulazione corretta del teorema di Eulero: *per un poliedro semplice con facce semplicemente connesse* $V - S + F = 2$.

Dicevamo nel paragrafo 1 che la verifica di una congettura non è la funzione più importante della dimostrazione: ben più rilevante è il suo ruolo di guida nel costruire definizioni e concetti, che ora delimitano ora generalizzano la congettura iniziale. Abbiamo già visto come l'ambito di validità di una congettura sia stato delimitato. In che senso la congettura viene generalizzata?

Innanzitutto la dimostrazione del teorema di Eulero mostra che in questo problema la rigidità euclidea è un'ipotesi irrilevante: invece di parlare di poliedri semplici, potremmo dire che *per ogni superficie deformabile in una sfera suddivisa in facce semplicemente connesse, con spigoli anche curvilinei*, $V - S + F = 2$. In questo senso alla fine del paragrafo 1 avevamo definito il teorema di Eulero un risultato di topologia. Con un po' di sforzo in più è anche possibile capire cosa

succede nel caso di poliedri non semplici (o superfici non deformabili in una sfera): analizzando il lemma 1 si può formalizzare il concetto di superficie con g fori (*superficie orientabile⁴ di genere g* , vedi figura 11) e dimostrare che *per ogni superficie orientabile di genere g suddivisa in facce semplicemente connesse* $V - S + F = 2 - 2g$. Infatti, volendo deformare su un piano un poliedro non semplice, togliere una faccia (o tutte le facce racchiuse da una spezzata chiusa composta da spigoli) non basta: occorrerà considerare più spezzate e si è naturalmente condotti a definire l'ordine di connessione di un poliedro come nella nota di pagina 4. E' poi possibile definire il genere in funzione dell'ordine di connessione. La cornice ha genere 1, il che spiega perché per tale poliedro avevamo trovato $V - S + F = 0$.

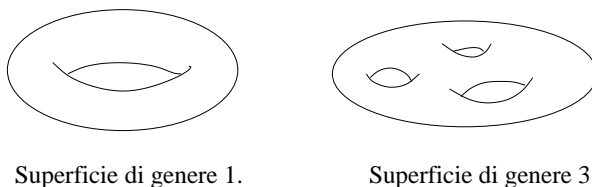


Figura 11: Superfici orientabili.

Se la formula di Eulero poteva sembrare poco più che una curiosità, la sua generalizzazione alle superfici di genere g fornisce un interessante legame tra la topologia di una superficie e la relazione algebrica che ogni sua suddivisione in poligoni deve soddisfare. La scoperta di questo legame segna l'inizio di uno dei più affascinanti settori della matematica moderna, la *topologia algebrica*. Abbiamo quindi visto come la dimostrazione non esaurisca il suo compito nel rendere certa una data congettura, ma spesso contenga in sé idee importanti per sviluppi futuri. Quando si smette di dimostrare e ci si affida solamente all'intuizione, o a verifiche al computer, questo afflusso di idee nuove viene a mancare e la matematica - ma lo stesso vale per le altre scienze - muore.

Analizzando il lemma 2, si può trovare una formula di Eulero ancora più complicata, che tenga conto delle facce non semplicemente connesse, anche se questa generalizzazione appare meno interessante della precedente, dato che ogni faccia non semplicemente connessa può essere inizialmente suddivisa in più facce semplicemente connesse.

5 Robotica

Molto schematicamente, un robot è un sistema di leve, incernierate tra loro o ad un riferimento fisso. Il tipo più semplice di robot è la lancetta di un orologio: una leva vincolata ad un piano, su cui è impernata tramite una delle sue estremità. La lancetta ha un solo *grado di libertà*, è cioè possibile descrivere la sua posizione mediante un solo dato numerico, ad esempio l'angolo che essa fa con una semiretta fissa che parte dal perno. Se esprimiamo questo angolo in radianti, la posizione della lancetta sarà determinata da un numero compreso tra 0 e 2π . In realtà, gli angoli 0 e 2π corrispondono alla medesima posizione. Il segmento $[0, 2\pi]$ che rappresenta graficamente le posizioni della lancetta, deve essere piegato in modo che le sue estremità coincidano, ottenendo una circonferenza. Questa circonferenza è lo *spazio delle configurazioni* della lancetta, cioè uno spazio geometrico i cui punti sono in bigezione con le posizioni che la lancetta può assumere (si veda la figura 12).

Consideriamo ora un braccio snodato: un sistema piano composto da due leve, di cui la prima impernata al piano da un estremità ed incernierata all'altra leva tramite l'altra estremità. Il braccio snodato ha due gradi di libertà: la sua posizione è determinata dall'angolo α che la prima leva fa con una semiretta fissata, e dall'angolo β che la seconda leva fa con la prima. Se

⁴La precisazione *orientabile* si riferisce al fatto che esistono anche superfici chiuse (cioè limitate e senza bordo) di tipo un po' strano, come la bottiglia di Klein, o il piano proiettivo. Queste hanno la proprietà di contenere un nastro di Möbius, e sono dette non orientabili. Non è possibile rappresentarle fedelmente nello spazio tridimensionale.

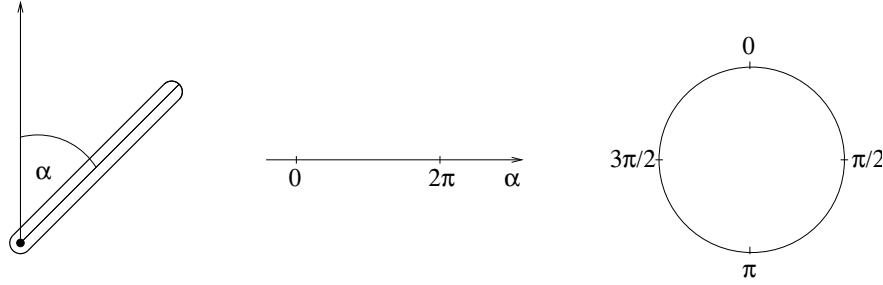


Figura 12: La lancetta e il suo spazio delle configurazioni.

rappresentiamo la coppia (α, β) come un punto di un piano cartesiano, troviamo che l'insieme delle posizioni ammissibili corrisponde al quadrato di vertici $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$, e $(2\pi, 2\pi)$. In realtà i punti $(\alpha, 0)$ e $(\alpha, 2\pi)$ si riferiscono alla stessa posizione, quindi devono essere identificati: dobbiamo curvare il quadrato in modo che il lato superiore vada a coincidere con quello inferiore, ottenendo un cilindro. Anche i punti $(0, \beta)$ e $(2\pi, \beta)$ devono essere identificati, quindi il cilindro deve essere curvato in modo che la circonferenza a destra coincida con quella a sinistra. La superficie così ottenuta ha la forma di una ciambella, in matematica come in architettura detta *toro*. Dunque lo spazio delle configurazioni del braccio snodato è il toro, cioè la superficie orientabile di genere 1 rappresentata a sinistra in figura 11 (si veda la figura 13).

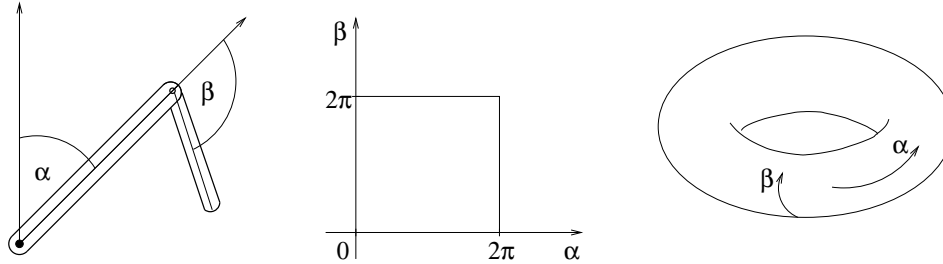


Figura 13: Il braccio snodato e il suo spazio delle configurazioni.

Studiamo adesso un robot più complesso, il braccio triplo. Si tratta di tre leve di lunghezza r impennate in una loro estremità ai tre vertici di un triangolo equilatero fisso, di vertici A, B, C e di lato ℓ . A ciascuna delle altre estremità è incernierata una di tre leve di lunghezza s , tutte a loro volta incernierate tra loro in un punto mobile O (la situazione è raffigurata a sinistra in figura 14). Supponiamo infine che le quantità r, s, ℓ verifichino le disuguaglianze $s < r$ e $r + 2s > \ell$.

Il braccio triplo ha due gradi di libertà: il punto O è libero di muoversi in una regione piana e una volta che O è stato fissato il sistema è rigido, non permette nessun movimento ulteriore. Determiniamo la regione accessibile al punto O . Il braccio snodato impennato in A vincola O a muoversi nello spazio compreso tra due circonferenze di centro A , una di raggio $r + s$, l'altra di raggio $r - s$. Lo stesso accade per i bracci snodati impennati in B ed in C . Quindi O può muoversi nell'intersezione di tre corone circolari centrate nei tre vertici, di raggio maggiore $r + s$ e raggio minore $r - s$. Questa intersezione è un "esagono" Γ , avente per lati sei archi di cerchio.

La posizione del punto O però non determina univocamente la posizione del braccio triplo, dato che non ci dice da quale lato ciascun braccio snodato ha il gomito. Ad una posizione di O all'interno di Γ corrispondono due posizioni per ciascun braccio snodato (gomito a destra oppure a sinistra), per un totale di $2 \times 2 \times 2 = 8$ posizioni diverse. Pertanto lo spazio delle configurazioni del braccio triplo è costituito da otto esagoni identici, ognuno dei quali corrisponde ad una diversa combinazione di gomiti piegati (destra-destra-destra, sinistra-destra-destra, ecc.). Dato che muovendo il robot con continuità è possibile invertire le piegature dei gomiti, questi otto esagoni non sono separati, ma sono incollati fra loro a formare una superficie unica. Vediamo come.

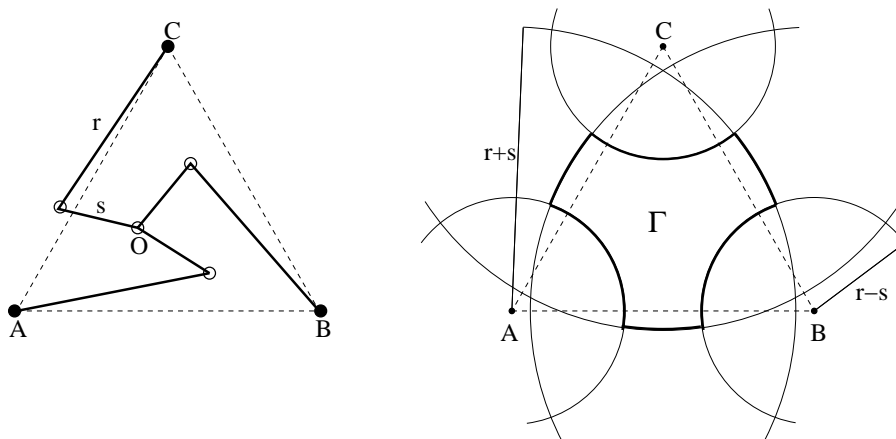


Figura 14: Il braccio triplo e l'esagono Γ .

Un punto su un lato di un esagono corrisponde ad una posizione in cui esattamente un braccio snodato si trova completamente allungato o completamente piegato. Muovendo il punto O di poco sarà allora possibile far assumere a questo braccio entrambi i tipi di piegatura, mentre il verso in cui sono piegati gli altri due bracci non varierà: ciò vuol dire che da tale posizione sono accessibili esattamente due esagoni, o in altri termini che in ogni spigolo si incontrano esattamente due facce.

Un punto su un vertice di un esagono corrisponde ad una posizione in cui esattamente due bracci snodati sono completamente allungati o completamente piegati. Questa volta, muovendo il punto O di poco, sarà possibile far assumere ad esattamente due bracci un verso arbitrario, per un totale di $2 \times 2 = 4$ modi possibili: ciò vuol dire che da tale posizione sono accessibili esattamente quattro esagoni o in altri termini che in ogni vertice si incontrano esattamente quattro facce.

Questi dati sono sufficienti a determinare il numero V dei vertici, il numero S degli spigoli e il numero F delle facce del poliedro ottenuto incollando gli esagoni. Ovviamente $F = 8$. Ogni faccia ha 6 vertici, per un totale di $6 \times 8 = 48$ punti, ma ogni vertice è comune a 4 facce, quindi dobbiamo dividere questo numero per 4, ottenendo $V = 12$. Ogni faccia ha 6 lati, per un totale di 48 lati, ma ogni spigolo è comune a 2 facce, quindi otteniamo $S = 24$. Pertanto $V - S + F = 12 - 24 + 8 = -4$.

Si potrebbe dimostrare che lo spazio delle configurazioni del braccio triplo è una superficie orientabile. Allora la formula di Eulero $V - S + F = 2 - 2g$ implica che $g = 3$: lo spazio delle configurazioni del braccio triplo è la superficie orientabile di genere 3 rappresentata a destra in figura 11.

Conoscere lo spazio delle configurazioni di un robot è importante per poter capire cosa succeda quando questo viene messo in movimento. Supponendo per semplicità che non ci siano né attrito né forze esterne, è possibile prevedere quale sarà il moto del robot una volta che sia stato sottoposto ad una spinta iniziale? La seconda legge della dinamica, la famosa $F = ma$, ci permette di scrivere le equazioni del moto, le cui variabili sono appunto le quantità che descrivono la posizione del robot. In altre parole, le equazioni della dinamica descrivono il moto di un punto sullo spazio delle configurazioni: nota la posizione e la velocità iniziale, determinano la posizione per tutti i tempi successivi. In teoria la situazione è semplice, ma in pratica anche soltanto scrivere le equazioni - non parliamo poi di risolverle - è estremamente complicato, specie quando lo spazio delle configurazioni ha una topologia ricca. Se prevedere esattamente il moto futuro è complicato, la topologia dello spazio delle configurazioni può tuttavia fornire indicazioni importanti sull'aspetto qualitativo o statistico di questo moto.

Abbiamo visto che il movimento del braccio snodato corrisponde al moto di un punto su una superficie orientabile di genere 3. La forma di questo moto dipende dalla curvatura di questa superficie, che a sua volta dipende dalla distribuzione delle masse delle leve. Se questa distribuzione è sufficientemente uniforme, si può usare un altro importante teorema di geometria - il teorema di Gauss-Bonnet, che lega la media della curvatura di una superficie al suo genere - per dimostrare

che la curvatura dello spazio delle configurazioni del braccio triplo è negativa, cioè che vicino ad ogni punto la superficie assume la forma di una sella. I moti liberi su superfici con curvatura negativa sono stati studiati già alla fine dell'Ottocento, quando è stato dimostrato che essi sono *fortemente sensibili alle condizioni iniziali* ed *ergodici* (per una discussione più approfondita su questi concetti si veda [6]). La forte sensibilità alle condizioni iniziali significa che, se variamo anche di pochissimo la posizione o la velocità iniziale del braccio snodato, dopo pochi istanti questo cambiamento diverrà macroscopico e in tempi brevi il moto sarà completamente diverso da quello originario. Questo fatto determina l'impossibilità effettiva di compiere previsioni. L'ergodicità permette invece di rispondere a domande statistiche quali: se fissiamo un insieme di posizioni A e guardiamo il braccio triplo per un tempo sufficientemente lungo, quanto spesso troveremo il braccio triplo in una delle posizioni di A ? Dire che il sistema è ergodico significa dire che esso si troverà nelle posizioni di A per un tempo proporzionale all'area di A , come sottoinsieme dello spazio delle configurazioni. Ad esempio, anche senza risolvere le equazioni del moto, possiamo prevedere che mettendo in movimento il braccio triplo in un modo qualsiasi, esso avrà tutti i gomiti a sinistra per $1/8$, cioè il 12.5 %, del tempo della sua evoluzione futura.

Riferimenti bibliografici

- [1] R.. Courant and H. Robbins. *Che cos'è la matematica?* Bollati Boringhieri, 2000. Traduzione di *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1941.
- [2] I. Lakatos. *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica.* Feltrinelli, 1979. Traduzione di *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, 1976. Riedizione a cura di J. Worrall e E. Zahar dell'originale apparso in quattro parti su *The British Journal for the Philosophy of Science*, **14**, 1963-64.
- [3] W. P. Thurston and J. R. Weeks. La matematica delle varietà tridimensionali. *Le Scienze*, (193), Settembre 1984.
- [4] T. S. Kuhn. *La struttura delle rivoluzioni scientifiche.* Einaudi, 1999. Traduzione di *The structure of scientific revolutions*, The University of Chicago, 1962.
- [5] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometria intuitiva.* Bollati Boringhieri, 1972. Traduzione di *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932.
- [6] D. Ruelle. *Caso e caos.* Bollati Boringhieri, 1992. Traduzione di *Chance and Chaos*, Princeton University Press, 1991.