Come si analizza un gioco

Parte I – Giochi ad informazione completa

Alberto Abbondandolo

Filippo Giuliani Alessandro Montagnani

Università di Pisa

Settimana di orientamento in Matematica 2010

Cosa è un gioco ad informazione completa?

Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.

Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.

Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.
- Regole che stabiliscono quali posizioni siano raggiungibili da ciascuna posizione.

Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.
- Regole che stabiliscono quali posizioni siano raggiungibili da ciascuna posizione.
- Alice e Bruno muovono alternandosi.

Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.
- Regole che stabiliscono quali posizioni siano raggiungibili da ciascuna posizione.
- Alice e Bruno muovono alternandosi.
- Alice e Bruno conoscono l'intera situazione.

Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.
- Regole che stabiliscono quali posizioni siano raggiungibili da ciascuna posizione.
- Alice e Bruno muovono alternandosi.
- Alice e Bruno conoscono l'intera situazione.
- Non ci sono mosse casuali.

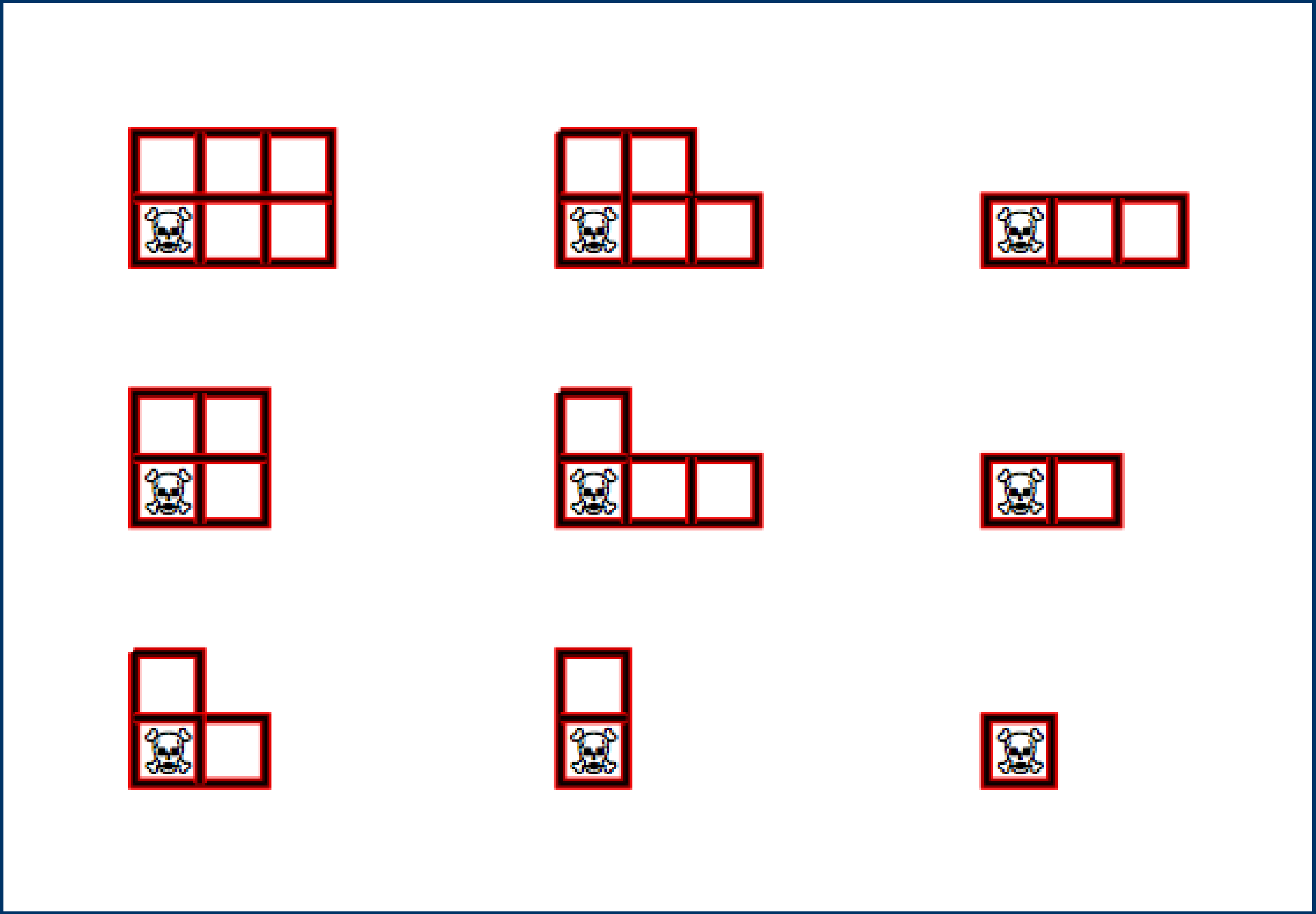
Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.
- Regole che stabiliscono quali posizioni siano raggiungibili da ciascuna posizione.
- Alice e Bruno muovono alternandosi.
- Alice e Bruno conoscono l'intera situazione.
- Non ci sono mosse casuali.
- Il giocatore che non può più muovere perde.

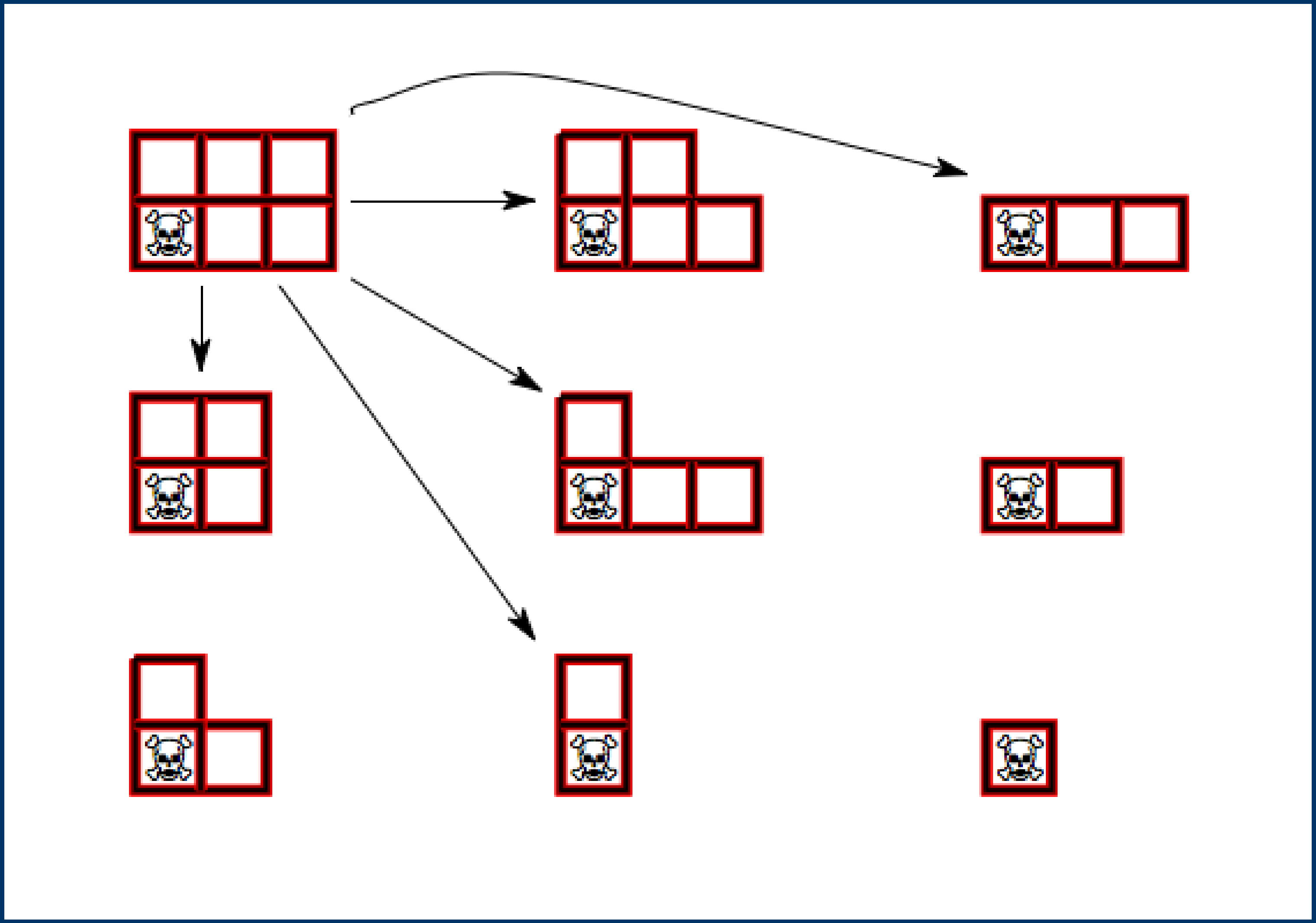
Cosa è un gioco ad informazione completa?

- Due giocatori: **A**lice e **B**runo.
- Una posizione iniziale ed un numero finito di posizioni successive.
- Regole che stabiliscono quali posizioni siano raggiungibili da ciascuna posizione.
- Alice e Bruno muovono alternandosi.
- Alice e Bruno conoscono l'intera situazione.
- Non ci sono mosse casuali.
- Il giocatore che non può più muovere perde.
- Il gioco termina in un numero finito di mosse.

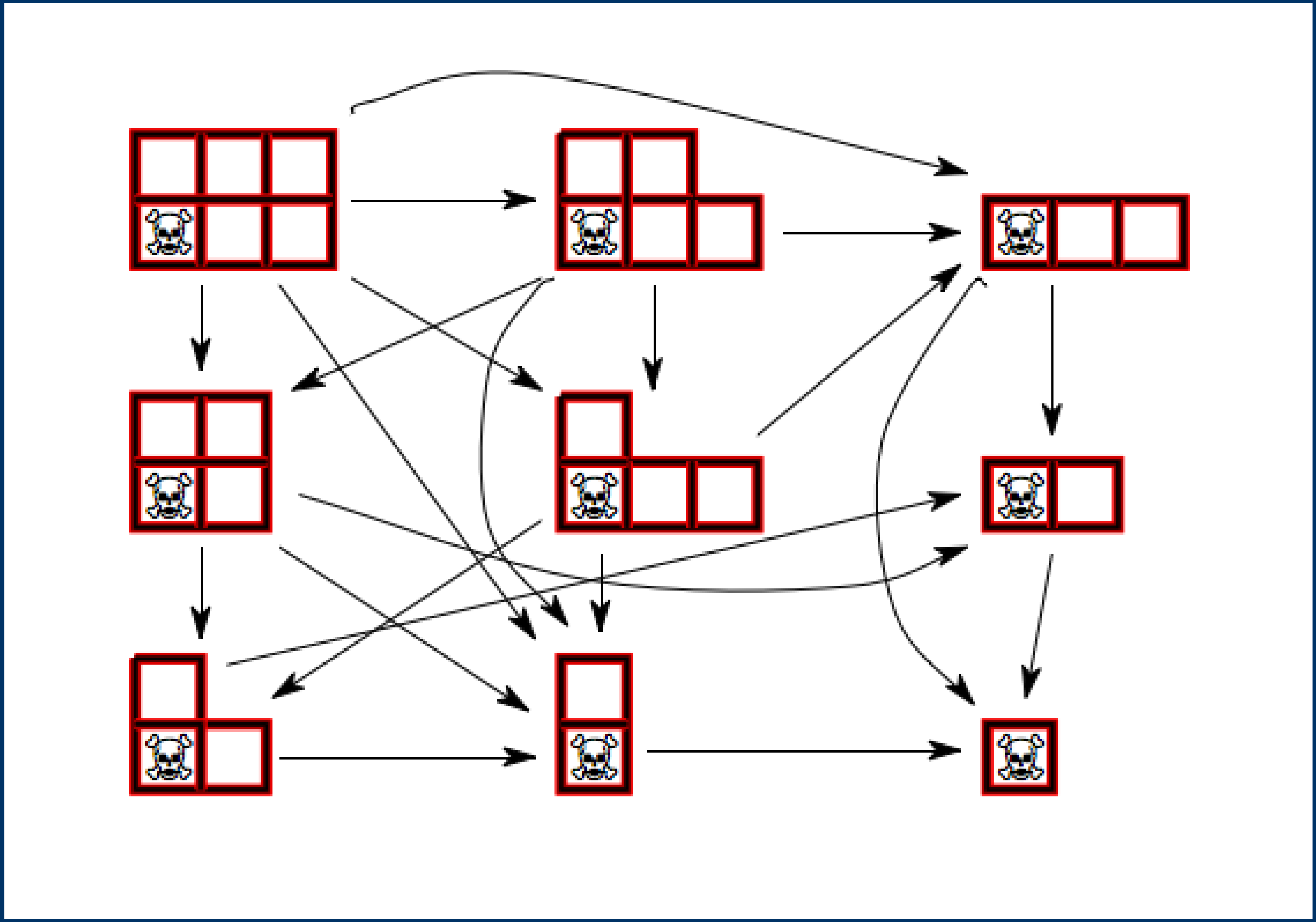
Le posizioni del Chomp 2x3



Costruiamo il grafo del Chomp 2x3



Ecco il grafo del Chomp 2x3



Posizioni vincenti e perdenti

- Sono **V**incenti quelle posizioni partendo dalle quali è sempre possibile vincere.

Posizioni vincenti e perdenti

- Sono **V**incenti quelle posizioni partendo dalle quali è sempre possibile vincere.
- Sono **P**erdenti le altre posizioni.

Posizioni vincenti e perdenti

- Sono **V**incenti quelle posizioni partendo dalle quali è sempre possibile vincere.
- Sono **P**erdenti le altre posizioni.
- Se siamo in una posizione vincente, abbiamo almeno una mossa che porta in una posizione perdente.

Posizioni vincenti e perdenti

- Sono **V**incenti quelle posizioni partendo dalle quali e' sempre possibile vincere.
- Sono **P**erdenti le altre posizioni.
- Se siamo in una posizione vincente, abbiamo almeno una mossa che porta in una posizione perdente.
- Se siamo in una posizione perdente, ogni mossa ci porta in posizioni vincenti.

Come classificare le posizioni

1. Marcare ogni posizione terminale come P.

Come classificare le posizioni

1. Marcare ogni posizione terminale come P.
2. Marcare come V ogni posizione da cui si può raggiungere una posizione P con una sola mossa.

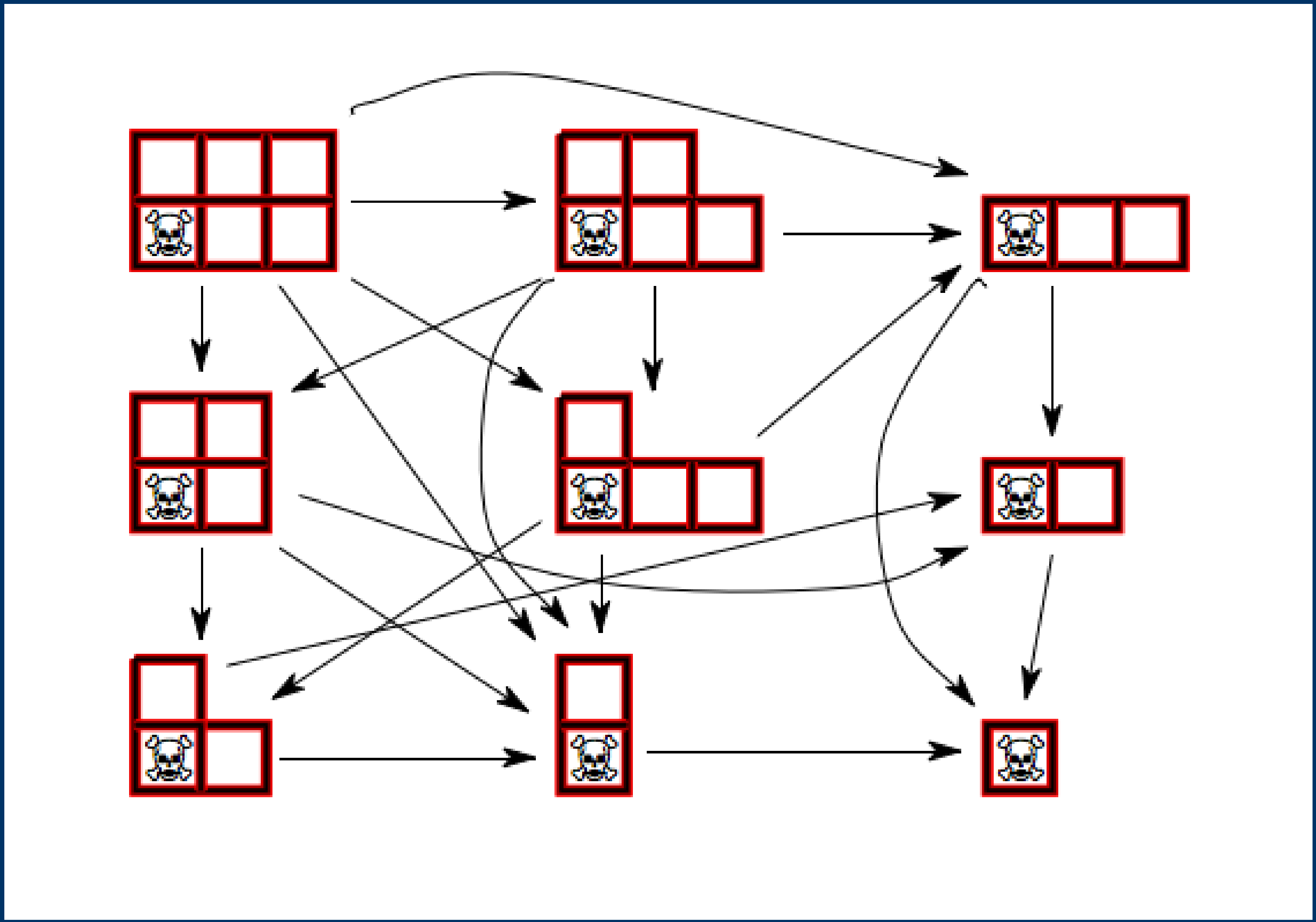
Come classificare le posizioni

1. Marcare ogni posizione terminale come P.
2. Marcare come V ogni posizione da cui si può raggiungere una posizione P con una sola mossa.
3. Trovare le posizioni da cui si possono raggiungere solo posizioni V e marcarle come P.

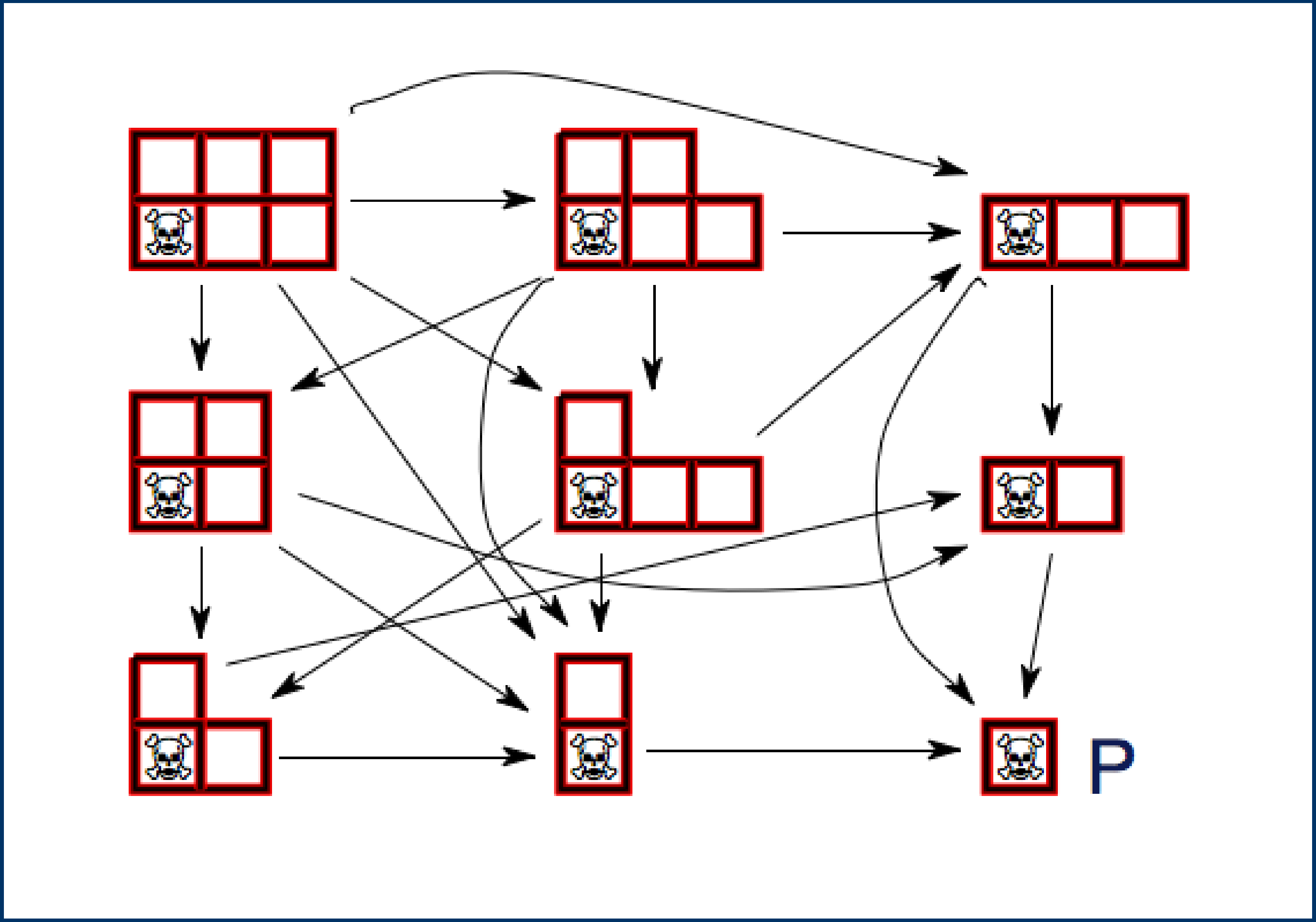
Come classificare le posizioni

1. Marcare ogni posizione terminale come P.
2. Marcare come V ogni posizione da cui si può raggiungere una posizione P con una sola mossa.
3. Trovare le posizioni da cui si possono raggiungere solo posizioni V e marcarle come P.
4. Se abbiamo classificato tutte le posizioni, STOP. Altrimenti ripartire dal passo 2.

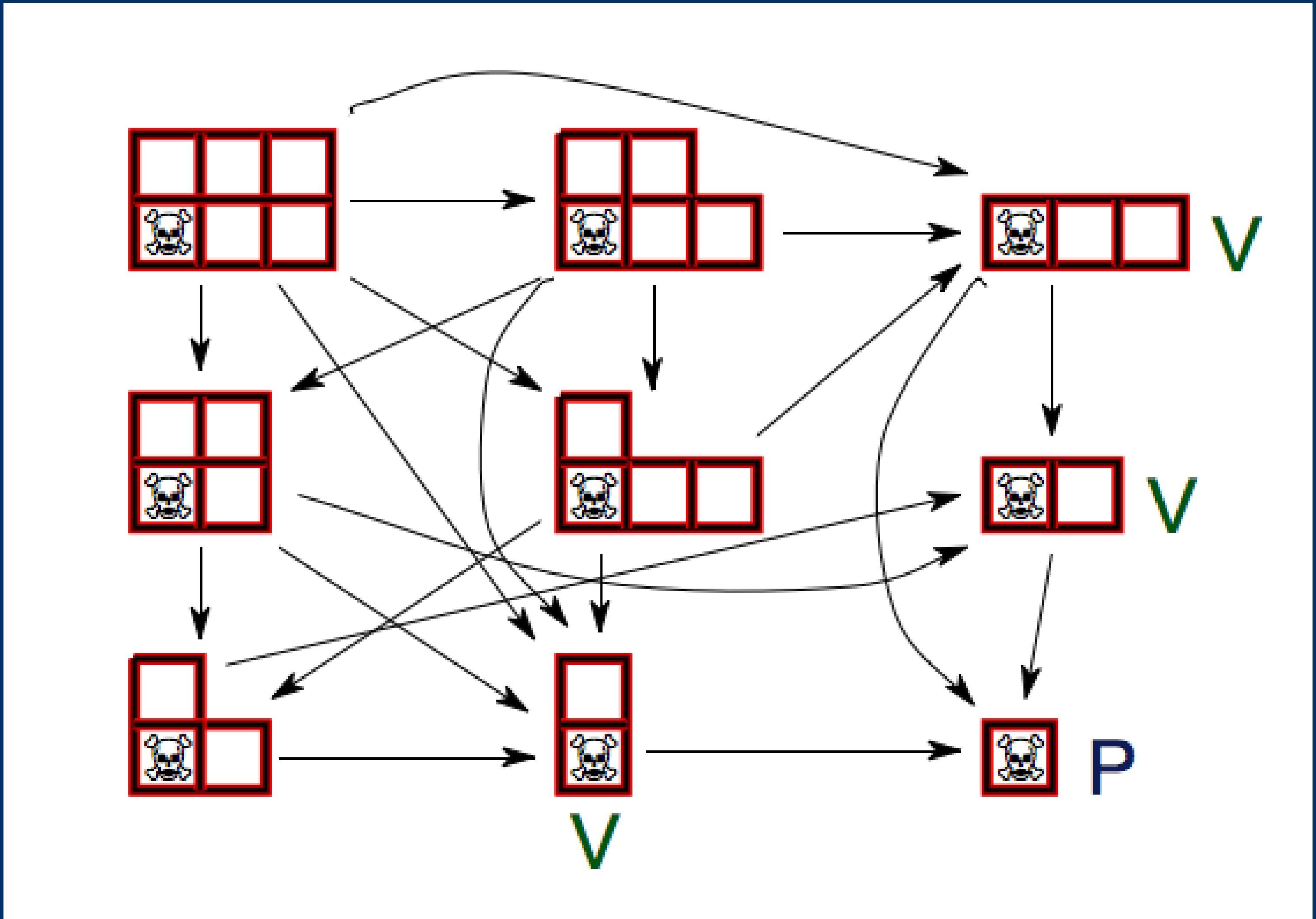
Analisi del Chomp 2x3



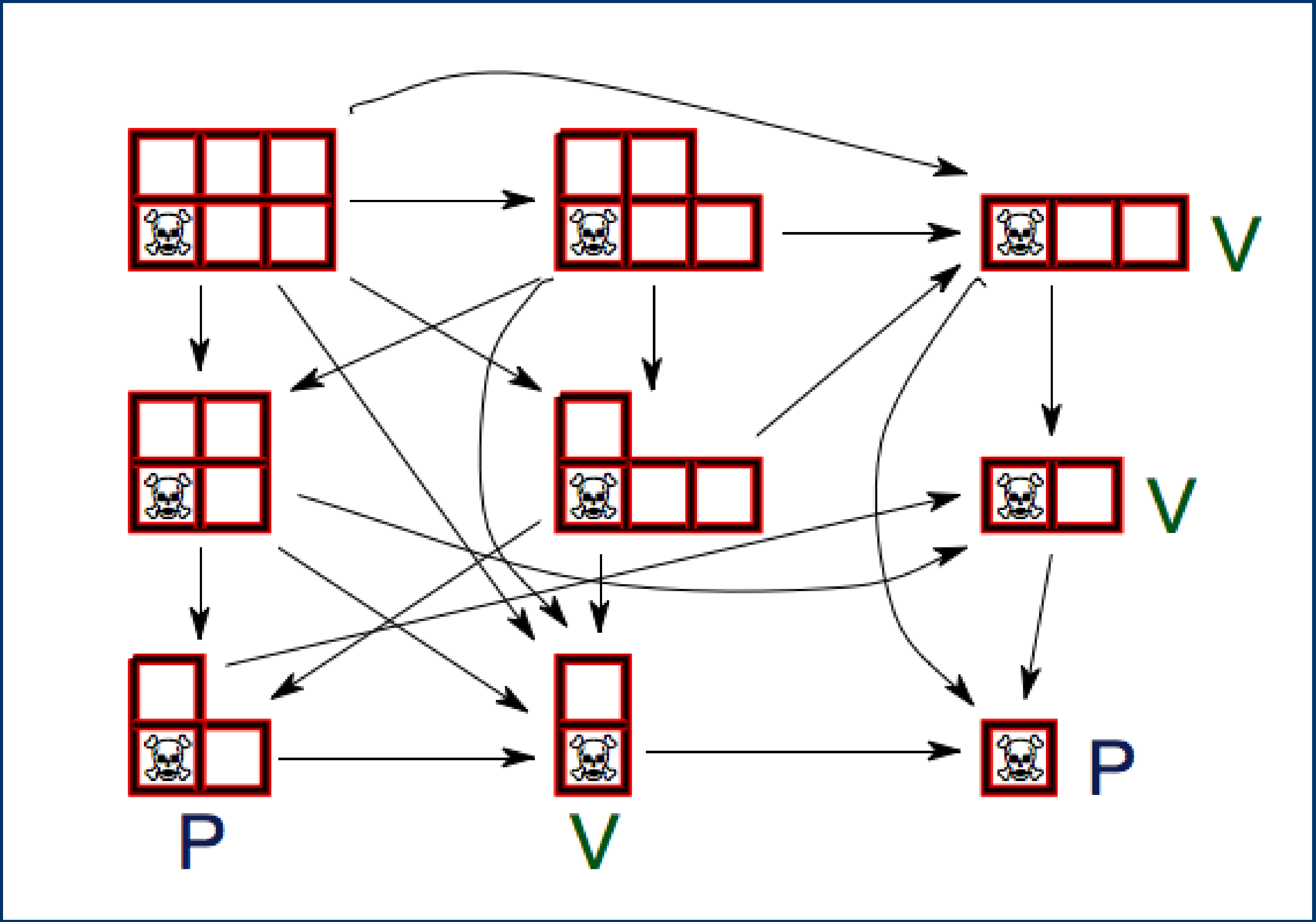
Marchiamo le posizioni terminali come P



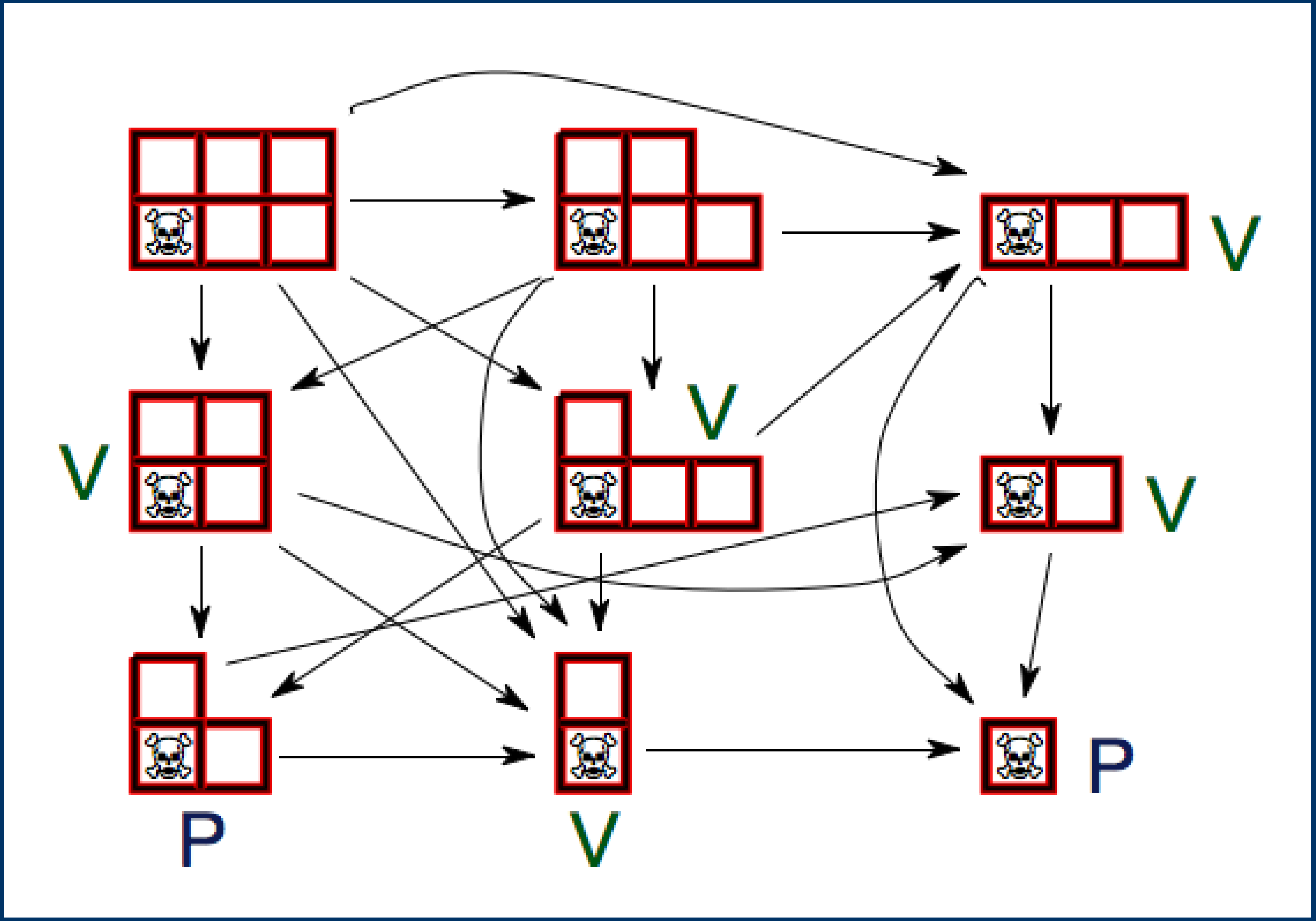
Marchiamo come V le posizioni da cui si può andare in una posizione P



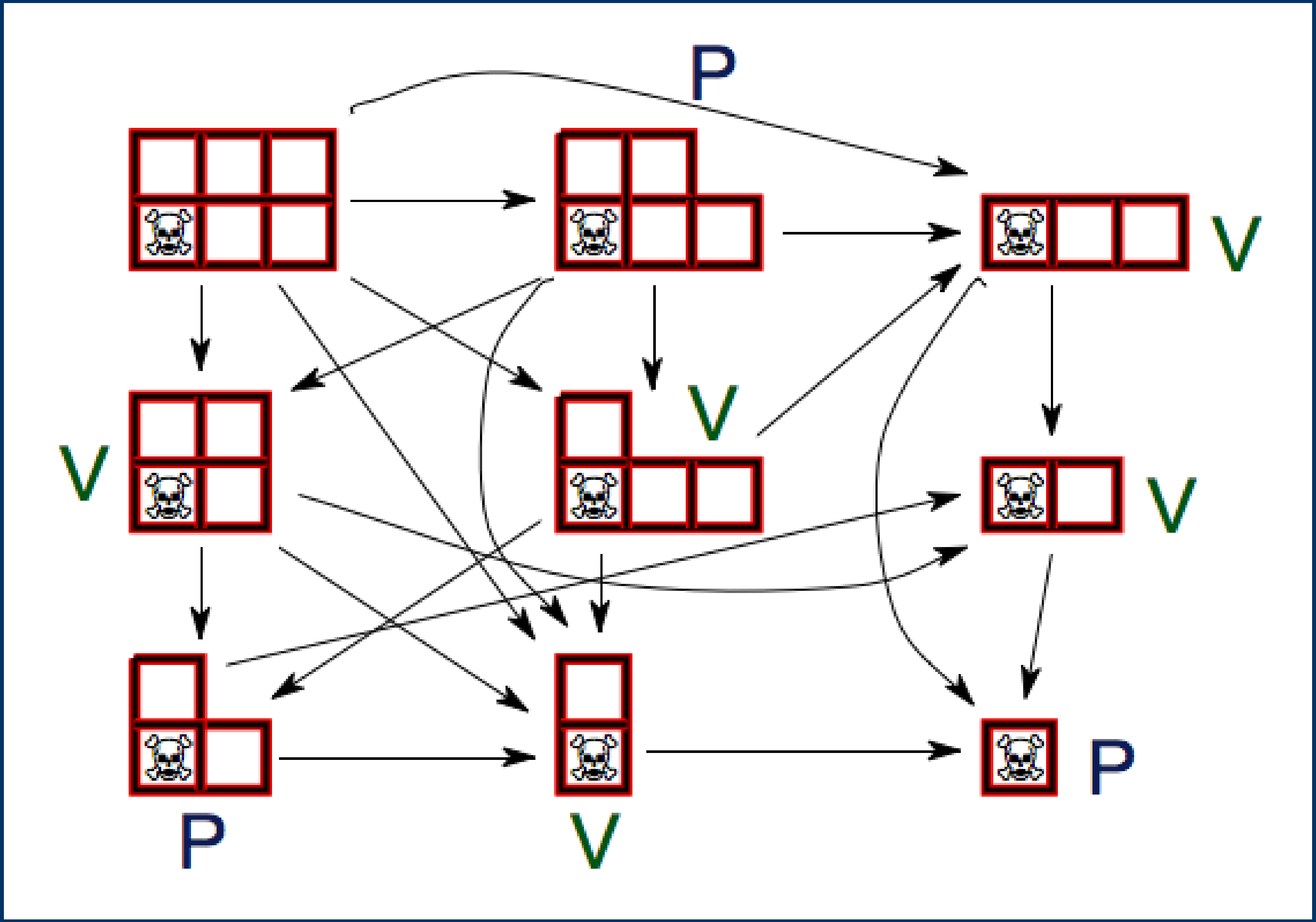
Marchiamo come P le posizioni da cui si può andare solo in una posizione V



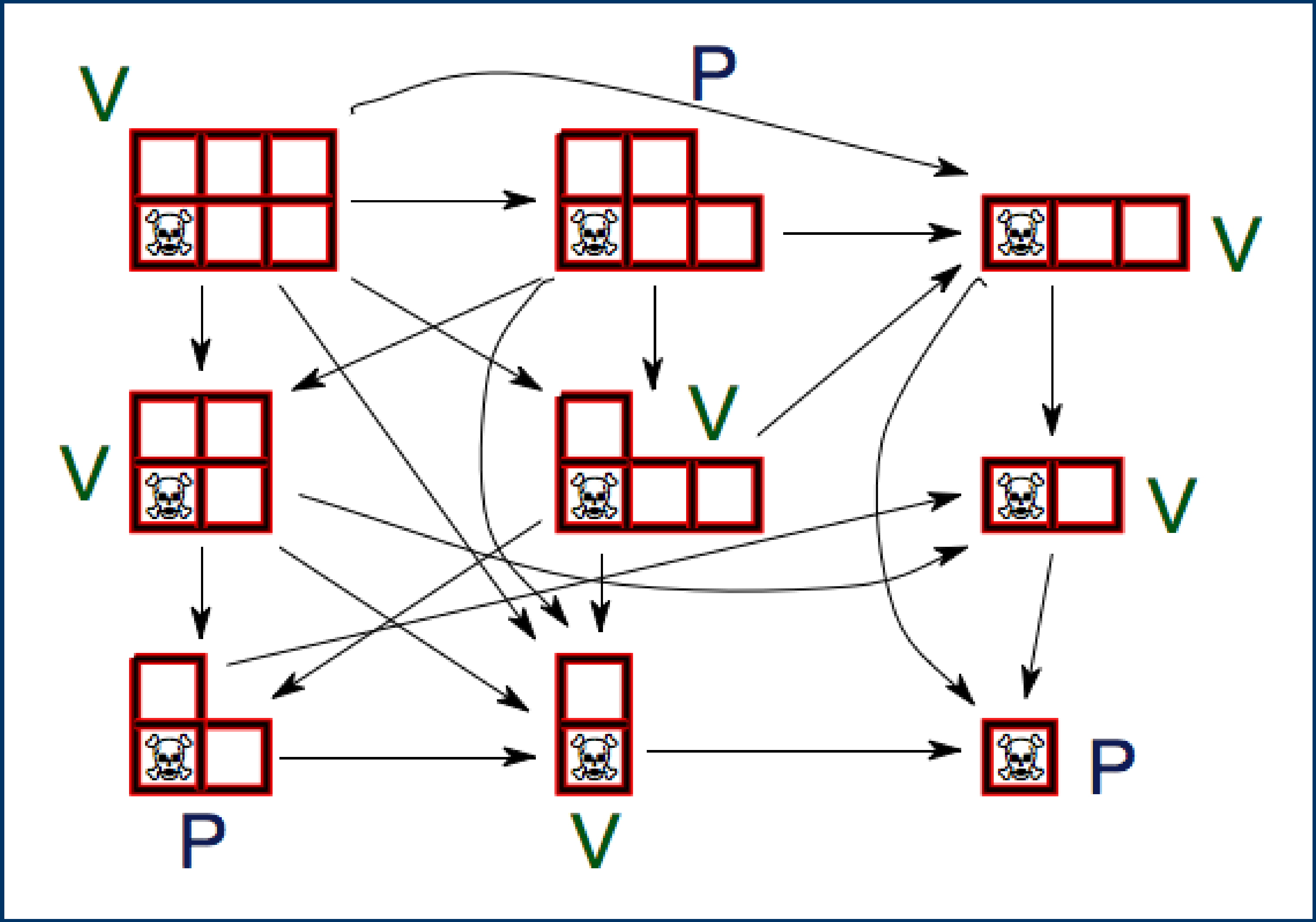
Marchiamo come V le posizioni da cui si può andare in una posizione P



Marchiamo come P le posizioni da cui si può andare solo in una posizione V



Marchiamo come V le posizioni da cui si può andare in una posizione P



Analisi del Chomp 2xN

- Ogni posizione consiste di h quadretti sulla riga bassa, con $1 \leqq h \leqq N$, e di k quadretti sulla riga alta, con $0 \leqq k \leqq h$. Indichiamo questa posizione come (h,k). Sia X l'insieme di tutte le posizioni.

Analisi del Chomp 2xN

- Ogni posizione consiste di h quadretti sulla riga bassa, con $1 \leqq h \leqq N$, e di k quadretti sulla riga alta, con $0 \leqq k \leqq h$. Indichiamo questa posizione come (h,k). Sia X l'insieme di tutte le posizioni.
- Sia P il sottoinsieme delle posizioni $(h,h-1)$ con $1 \leqq h \leqq N$ e sia V il sottoinsieme delle altre.

Analisi del Chomp 2xN

- Ogni posizione consiste di h quadretti sulla riga bassa, con $1 \leqq h \leqq N$, e di k quadretti sulla riga alta, con $0 \leqq k \leqq h$. Indichiamo questa posizione come (h,k). Sia X l'insieme di tutte le posizioni.
- Sia P il sottoinsieme delle posizioni $(h,h-1)$ con $1 \leqq h \leqq N$ e sia V il sottoinsieme delle altre.
- La posizione terminale è in P, da ogni posizione in V si può raggiungere P, da P si può soltanto raggiungere V.

Analisi del Chomp 2xN

- Deduciamo che effettivamente V è l'insieme delle posizioni vincenti e che P è l'insieme di quelle perdenti. In particolare, la posizione iniziale è vincente.

Argomento della mossa rubata

- In un qualunque Chomp MxN Alice ha la possibilità di vincere.

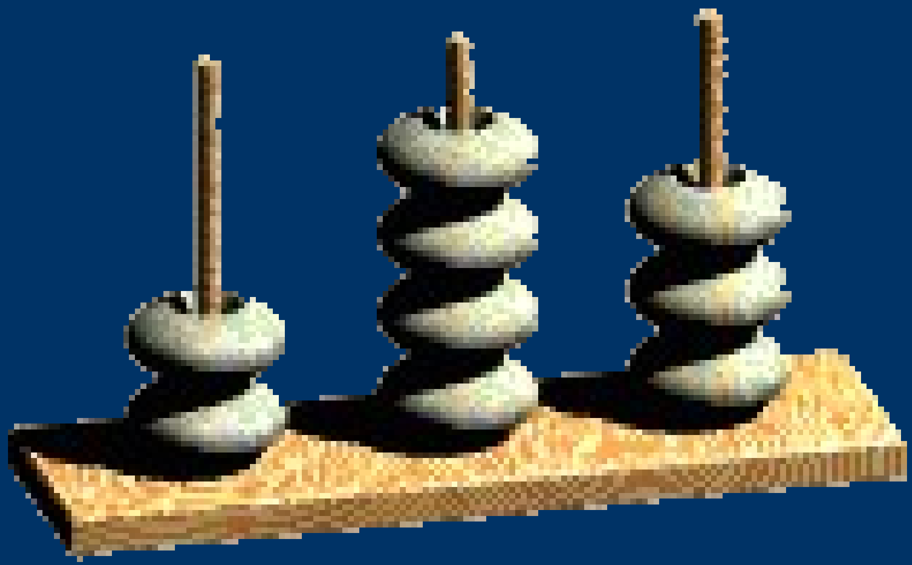
Argomento della mossa rubata

- In un qualunque Chomp *M*x*N* Alice ha la possibilità di vincere.
- Se la posizione ottenuta eliminando il quadratino in alto a destra è perdente, allora Alice fa questa mossa e lascia Bruno in una posizione perdente.

Argomento della mossa rubata

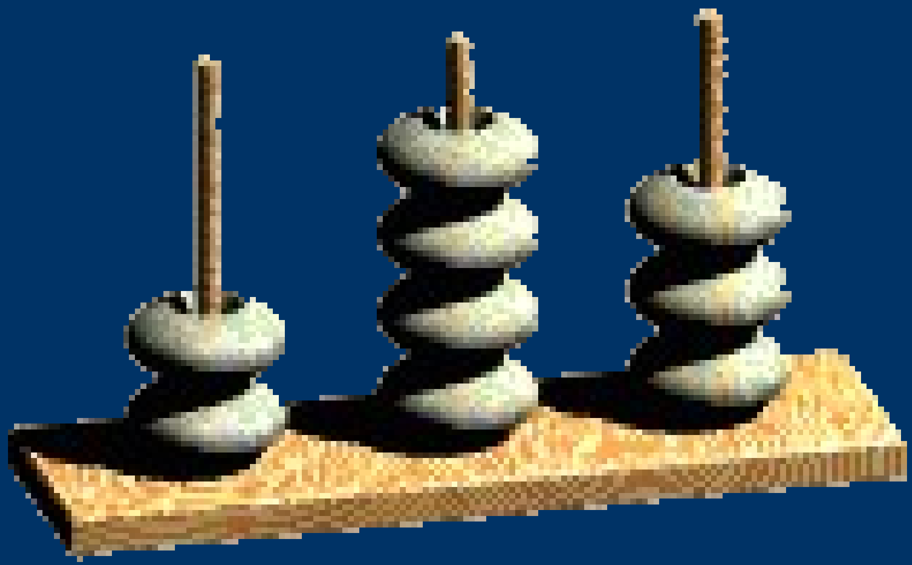
- In un qualunque Chomp MxN Alice ha la possibilità di vincere.
- Se la posizione ottenuta eliminando il quadratino in alto a destra è perdente, allora Alice fa questa mossa e lascia Bruno in una posizione perdente.
- Se la posizione di cui sopra è vincente, per definizione esiste una posizione perdente da essa raggiungibile. Ma, date le regole del Chomp, Alice può raggiungere tale posizione perdente con la prima mossa.

Il gioco del Nim



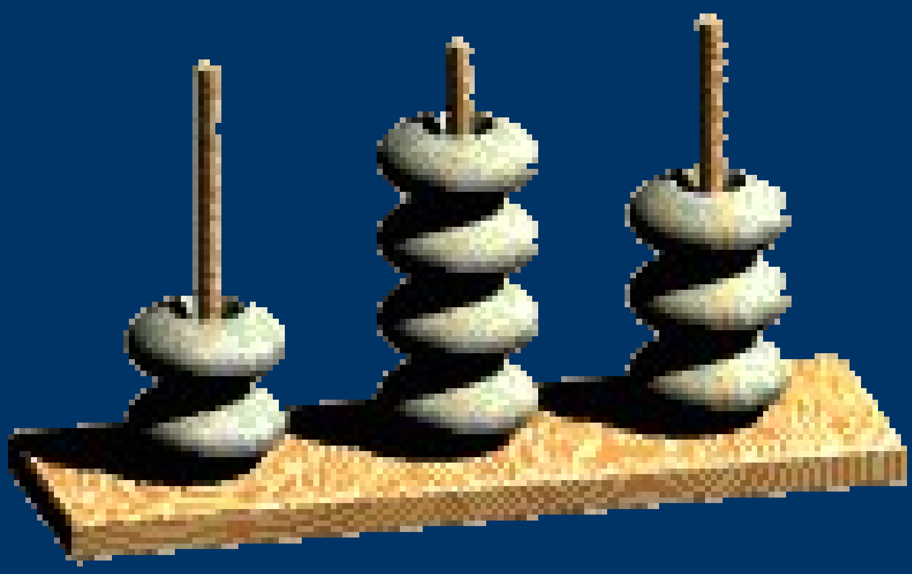
- Si parte con un certo numero di pietre forate infilate in diversi pioli.

Il gioco del Nim



- Si parte con un certo numero di pietre forate infilate in diversi pioli.
- Alice e Bruno a turno tolgono quante pietre vogliono – ma almeno una – da un solo piolo.

Il gioco del Nim



- Si parte con un certo numero di pietre forate infilate in diversi pioli.
- Alice e Bruno a turno tolgono quante pietre vogliono – ma almeno una – da un solo piolo.
- Vince chi toglie l'ultima pietra.

Le posizioni perdenti nel Nim

- Si scrivono i numeri delle pietre in ciascun piolo in base 2.

Le posizioni perdenti nel Nim

- Si scrivono i numeri delle pietre in ciascun piolo in base 2.

- A = 6 = 110
  B = 15 = 1111
  C = 9 = 1001

Le posizioni perdenti nel Nim

- Si scrivono i numeri delle pietre in ciascun piolo in base 2.
- Si incolonnano questi numeri in base 2: se in ciascuna colonna gli `1` sono in numero pari, la posizione è perdente.

- A = 6 = `110`
B = 15 = `1111`
C = 9 = `1001`

Le posizioni perdenti nel Nim

- Si scrivono i numeri delle pietre in ciascun piolo in base 2.
- Si incolonnano questi numeri in base 2: se in ciascuna colonna gli `1` sono in numero pari, la posizione è perdente.

- A = 6 = `110`
  B = 15 = `1111`
  C = 9 = `1001`
- La posizione sopra è perdente.

Le posizioni perdenti nel Nim

- Si scrivono i numeri delle pietre in ciascun piolo in base 2.
- Si incolonnano questi numeri in base 2: se in ciascuna colonna gli 1 sono in numero pari, la posizione è perdente.
- A = 6 = 110
  B = 15 = 1111
  C = 9 = 1001
- La posizione sopra è perdente.
- Se nel piolo C il numero di pietre fosse
  C = 11 = 1011
  la posizione sarebbe vincente.

Perché sono queste le posizioni P?

Perché sono queste le posizioni P?

- Indichiamo con Y l'insieme di queste posizioni. La posizione terminale (0,0,0) sta in Y.

Perché sono queste le posizioni P?

- Indichiamo con Y l'insieme di queste posizioni. La posizione terminale (0,0,0) sta in Y.
- Da una posizione non in Y possiamo muovere in Y: guardiamo alla prima colonna a sinistra con una discrepanza e scelto un numero con un `1` in tale colonna, cambiamo quelle sue cifre necessarie a ristabilire la parità.

Perché sono queste le posizioni P?

- Indichiamo con Y l'insieme di queste posizioni. La posizione terminale (0,0,0) sta in Y.
- Da una posizione non in Y possiamo muovere in Y: guardiamo alla prima colonna a sinistra con una discrepanza e scelto un numero con un `1` in tale colonna, cambiamo quelle sue cifre necessarie a ristabilire la parità.
- Da una posizione in Y non possiamo rimanere in Y: dovendo modificare il numero di pietre in un piolo, cambieremo almeno una cifra di esattamente uno dei numeri in base 2: nella relativa colonna gli `1` non saranno più in numero pari.

Per saperne di più

- E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza, “Passatempi e giochi – alla ricerca di problemi e soluzioni”, Quaderni della settimana matematica, Università di Pisa 2007. http://www.dm.unipi.it/~gaiffi/papers/giochi.pdf
- Thomas S. Ferguson, “Game theory”, http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html
- E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, “Winning ways for your mathematical plays”, A. K. Peters Ltd 2001.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.
3) Analizzare il Chomp *N*x*N*.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.
3) Analizzare il Chomp *N*x*N*.
4) Quante sono le posizioni del Chomp NxM ?

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.
3) Analizzare il Chomp *N*x*N*.
4) Quante sono le posizioni del Chomp NxM ?
5) Gioco dei divisori.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.
3) Analizzare il Chomp NxN.
4) Quante sono le posizioni del Chomp NxM ?
5) Gioco dei divisori.
6) Gioco del 31.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.
3) Analizzare il Chomp NxN.
4) Quante sono le posizioni del Chomp NxM ?
5) Gioco dei divisori.
6) Gioco del 31.
7) Giocare a Nim contro il computer.

E adesso a voi!

1) Torre di Hanoi.
2) Scegli e dividi.
3) Analizzare il Chomp NxN.
4) Quante sono le posizioni del Chomp NxM ?
5) Gioco dei divisori.
6) Gioco del 31.
7) Giocare a Nim contro il computer.
8) Giocare a Chomp 4x7 contro il computer.