Compito di Geometria I - 9/9/2014

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Parte 1 (scrivere direttamente negli spazi assegnati)

1) Dato il piano Π di equazione $x + 2y + 3z = 1$, scrivere l'equazione di un piano Π' parallelo a Π tale che il segmento dell'asse z che è compreso tra Π e Π' abbia lunghezza 5.

....

2) Dire se i seguenti sottoinsiemi di matrici sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e in tal caso indicarne la dimensione.

$\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ tr(A) = 0\}$	si	$dim =$ .... ;	no
$\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ det(A) = 0\}$	si	$dim =$ .... ;	no
$\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ A + {}^tA = 0\}$	si	$dim =$ .... ;	no

3) (a) Sia S un qualunque sottoinsieme (non necessariamente sottospazio vettoriale) di $\mathbb{R}^2$. Giustificare (brevemente) che le matrici $A \in GL_2(\mathbb{R})$ tali che $A(S) = S$ formano un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ rispetto all'operazione di gruppo data dalla composizione (le matrici si considerano come trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ nella maniera standard)

.

(b) Se S è l'ellisse $\{(x, y) \ : \ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1\}$, intuitivamente, da quanti parametri (continui) dipende tale gruppo? ....

4) (facoltativo) Data la conica .... $= 0$ determinare le coordinate dei centri (se esistono) e scrivere la forma canonica affine

....

....

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $V := \mathbb{R}_n[x]$, e sia $T_\alpha : \ V \to V, \quad \alpha \in \mathbb{R}$, l'operatore

$$T_\alpha(p(x)) = \ p(x+1) - p(\alpha x).$$

1. Dimostrare che T_α è lineare.
2. Discutere la diagonalizzabilità di T_α quando $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$.
3. Per $n = 3$ discutere la diagonalizzabilità di T_α quando $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

Esercizio 2. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i quattro vettori:

$$v_1 = {}^t(1, 0, 0), \ v_2 = {}^t(1, 1, 0), \ v_3 = {}^t(0, 1, 1), \ v_0 = {}^t(1, -1, 1).$$

1. Se φ è un prodotto scalare di segnatura $(2, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ e i tre vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base ortogonale $\mathcal{B}$ rispetto a φ, che forma assume la matrice $M_\mathcal{B}(\varphi)$?
2. Costruire in $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare φ di segnatura $(2, 1, 0)$ in modo che $\mathcal{B}$ sia ortogonale e v_0 sia isotropo (basta specificare $M_\mathcal{B}(\varphi)$).
3. Determinare la matrice del φ costruito nel punto precedente rispetto alla base canonica.