2.12.2021

Ancora sul determinante. Abbiamo dimostrato prima l'unicità e poi l'esistenza del determinante. L'esistenza è data, per induzione su $n$, dalla così detta formula di Laplace per la colonna $j$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Come si vede la colonna $j$ è fissata.
Vogliamo provare una formula simile in cui è fissata una riga. Come conseguenza avremo

$$\det A = \det A^T$$

La riga $A_i$ di $A$, $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ si può scrivere

$$A_i = a_{i1} e_1^T + \quad + a_{in} e_n^T$$

~~Cosa~~ Pertanto

$$\det A = a_{i1} \det B_1 + \quad + a_{in} \det B_n$$

dove $B_j = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{i-1} \\ e_j^T \\ A_{i+1} \\ A_n \end{pmatrix}$ cioè $B_j$ ha le righe di $A$ tranne la $i$-esima dove ho invece $e_j^T = (0, \_, 0, 1, 0 - 0)$

posto $j$

Ora calcoliamo $\det B_j$

Se per $k \neq i$ $1 \le k \le n$ sostituiamo la $k$-ma riga di $B_k = A_k$ con $A_k - a_{kj} e_j^T$ otteniamo una matrice $C_j$ fatta così

$$C_j = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 \; 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \qquad (1 \text{ al posto } i\,j)$$

allora si trova la matrice $A_{ij}$

Ora $\det B_j = \det C_j = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Sostituiamo:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det B_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det C_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \cancel{a_{ij}} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

che è la formula di Laplace per la riga $i$.

Corollario $\det A = \det \bar{A}$, $A$ $n \times n$

prova per induzione su $n$

per $n = 2$ è vero $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

supponiamolo vero per $n-1$

$$\det A^T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det (A^T)_{ij} \quad . \text{ Ma } (A^T)_{ij} = (A_{ji})^T$$

elem. di posto $i,j$ in $A^T$

quindi $\det A^T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det (A_{ji})^T$

per ipotesi induttiva $\det (A_{ji})^T = \det A_{ji}$, quindi

$$\det A^T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det A_{ji} = \det A$$ per la

formula di Laplace relativa alla j-ma riga.

Teorema di Binet

$A, B$ matrici $n \times n$. $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

prova:

caso 1 $\det B = 0$ cioè $rk\, B < n$. Poiché $rk\, AB \leq rk B$ anche $\det (A \cdot B) = 0$ e il teorema vale se $\det B = 0$

caso 2 $\det B \neq 0$. Scriviamo $f(A) = \dfrac{\det (AB)}{\det B}$

Se $f$:

- si annulla se $A$ ha 2 righe uguali
- è lineare su $A_i$, $i = 1, \ldots, n$
- $f(I) = 1$

Allora $f = \det$. e il teorema è provato

Sia $A_i = A_j$. La riga $i$ di $A \cdot B$ è fatta così

$$(AB)_i = ( \langle A_i, B_1 \rangle, \ldots, \langle A_i, B_n \rangle )$$

e quindi è uguale a $(AB)_j =$

$( \langle A_j, B_1 \rangle, \ldots, \langle A_j, B_n \rangle )$ perché $A_i = A_j$

Se $A_i = A_i' + A_i''$ ~~e poniamo~~, allora

$$(AB)_i = (\langle A_i' + A_i'', B_1\rangle, \dots \langle A_i' + A_i'', B_n\rangle) =$$

$$= (\langle A_i', B_1\rangle \dots \langle A_i', B_n\rangle) + (\langle A_i'', B_1\rangle + \dots + \langle A_i'', B_n\rangle)$$

quindi $f(A) = f(A') + f(A'')$ dove $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i' \\ A_n \end{pmatrix}$ e

$A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i'' \\ A_n \end{pmatrix}$ perché $\det(A \cdot B) = \det(A'B) + \det(A''B)$

Se $A_i = \lambda A_i'$ allora $(AB)_i = (\langle \lambda A_i', B_1\rangle \cdots \langle \lambda A_i', B_n\rangle)$
$= \lambda(\langle A_i', B_1\rangle \cdots \langle A_i', B_n\rangle)$

e quindi $f(A) = \lambda f(A')$ dove $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i' \\ A_n \end{pmatrix}$

Se $A = I$, $f(I) = \dfrac{\det(IB)}{\det B} = \dfrac{\det B}{\det B} = 1$

Quindi $f(A) = \det A$.

Corollario

1) se $M$ è invertibile $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$
perché $M^{-1}M = 1$ e quindi $\det M \cdot \det(M^{-1}) = 1$

2. Se $A'$ è simile ad $A$ $\det A' = \det A$

$A' = M^{-1}AM$ $\det A' = \cancel{\det M} \cdot \det A \cdot \cancel{\det(M^{-1})}$
$= \det A$.

Esercizi d'esame

$V = \mathcal{L}(\mathbb{R}_k[x], \mathbb{R})$

$W \subset \mathbb{R}_k[x]$ sottospazio di dim $p$

$A = \{T \in V \mid \operatorname{Ker} T \supset W\}$

dimostrare che $A$ è un sottospazio di $V$ e calcolarne la dimensione

Soluzione

$A$ è un sottospazio:

$T, T' \in A \quad w \in W$ allora $(T+T')(w) = T(w) + T'(w) = 0 + 0 = 0.$

e questo per ogni $w \in W \Rightarrow T + T' \in A$

se $\lambda$ è un numero e $T \in A$ $(\lambda T)(w) = \lambda(T(w)) = 0$ per ogni $w \in W \Rightarrow \lambda T \in A.$

dim $A$: Se $(w_1 - w_p)$ è una base di $W$ e

$T(w_1) = 0, \ldots, T(w_p) = 0 \Rightarrow T \in A$

dunque $A = \{T \mid T(w_1) = 0, \ldots, T(w_p) = 0\}$

queste sono $p$ equazioni lineari indipendenti (perché $w_1, \ldots, w_p$ sono indipendenti) che hanno come spazio di soluzioni $A$.

Dunque $\dim A = \dim V - p = k + 1 - p.$

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}_3[x]$ e sia

$T_a : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la mappa definita da

$$T_a(p(x)) = (a-1)p(x-1)$$

provare 1) che $T_a$ è lineare per ogni $a \in \mathbb{R}$

2) per quali $a$ $T_a$ è invertibile?

3) per quali $a, b$ il polinomio $p(x) = x^3 + x + b \in \operatorname{Im} T_a$?

1) $T_a$ è lineare

$$T_a(p(x)+q(x)) = (a-1)[(p+q)(x-1)] =$$
$$=(a-1)(p(x-1)+q(x-1)) =$$
$$=(a-1)p(x-1) + (a-1)q(x-1)$$

$$T_a(\lambda p(x)) = (a-1)(\lambda p(x-1)) =$$
$$= \lambda[(a-1)p(x-1)] = \lambda T_a(p(x))$$

2. $\ker T_a = \{p(x) : T_a(p(x)) = 0\}$

Ma se $p$ non è il polinomio nullo,
$p(x-1) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$
non è il polinomio nullo
e $(a-1)p(x-1)$ non è il polinomio nullo se $a \neq 1$
quindi se $a \neq 1$ $\ker T_a = \{0\}$ e $T_a$ è invertibile. Se $a = 1$ $T_a = 0$ è la mappa nulla

3. Se $a \neq 1$ $T_a$ è surgettiva e $x^3 + x + b \in \operatorname{Im} T_a$

Se $a = 1$ fu $T_a = \{0\}$ e non contiene $x^3 + x + b$ qualunque sia $b$. 