9 Dicembre 2021

Cerchiamo invarianti della classe di similitudine di una matrice $n \times n$. Queste sono le matrici associate ad un endomorfismo
$$T: V \to V$$
di uno spazio vettoriale di dim n rispetto alle sue basi.

Definizione

1. $v \in V$ è AUTOVETTORE di T se $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v \quad \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ è AUTOVALORE di T se $\exists\, v \neq 0$ tale che $T(v) = \lambda v$
3. V_λ = autospazio di $\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$
4. T è DIAGONALIZZABILE se V ha una base formata da autovettori
5. $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ è DIAGONALIZZABILE se nella sua classe di similitudine c'è una matrice diagonale.

<u>Osservazione</u> se λ è autovalore di T, A è una matrice associata T rispetto ad una base $\mathcal{B}$ allora
$$V_\lambda = \ker(T - \lambda\, id) \neq \{0\}$$
e quindi $A - \lambda I$ non è invertibile, cioè
$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Sia $p_A(x) = \det(A - xI)$. Allora:

- $p_A(x)$ è un polinomio di grado $n = \dim V$
- il suo termine noto è $\det A$, comincia con $(-1)^n x^n$
- ~~p(B~~ $p_B(x) = p_A(x)$ se B è simile ad A

Infatti $\det(B - xI) = \det(M^{-1}AM - xM^{-1}M) =$
$= \det(M^{-1}(A - xI)M) = \det(A - xI)$
(per Binet e $\det M^{-1} = (\det M)^{-1}$).

Dunque possiamo scrivere $p_A(x) = p_T(x)$. Questo è il polinomio CARATTERISTICO di T (o di A)

<u>Proposizione</u> Le radici di $p_T(x)$ sono tutti e soli gli autovalori reali o complessi di T
Infatti se $p(\lambda) = 0$ $V_\lambda = \ker(T - \lambda\, id) \neq \{0\}$ e viceversa.

Abbiamo trovato un invariante della classe di similitudine: il polinomio caratteristico e tutti i suoi coefficienti.

<u>Definizione</u> 1) la molteplicità GEOMETRICA $m_g(\lambda)$ di un autovalore è la dimensione di $V_\lambda = \ker(T - \lambda\, id)$

2. la molteplicità <u>algebrica</u> $m_a(\lambda)$ è la molteplicità di λ come radice di $p_T(x)$ $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ divide $p_T(x)$

$$p_T(x) = (x - \lambda)^{m_a(\lambda)} q(x) \text{ con } q(\lambda) \neq 0.$$

Prima di dare un criterio di diagonalizzabilità ci serve il seguente teorema

Teorema Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di $T: V \to V$. Siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori risp. di autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti.

Prova: per induzione su k

$k=1$ un solo autovettore v. $v \neq 0$ quindi indipendente

$k-1 \Rightarrow k$. Possiamo supporre per ipotesi induttiva $v_1, \dots, v_{k-1}$ linearmente indipendenti

Vediamo che anche $v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ lo sono.

Se $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$, allora

$$0 = T(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = \lambda_1 a_1 v_1 + \dots + \lambda_k a_k v_k$$

Sostituiamo $a_k v_k$ con $-(a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1})$

Otteniamo

$$0 = \lambda_1 a_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} v_{k-1} - \lambda_k (a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1})$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_k) a_1 v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) a_{k-1} v_{k-1}$$

Poiché $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ se $i \neq k$ e $v_1 - v_{k-1}$ sono indipendenti, si deve avere $a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$

Dalla prima relazione otteniamo

$$a_k v_k = 0$$

e dato che $v_k \neq 0$ anche a_k deve essere 0 e $v_1 - v_k$ sono indipendenti.

Corollario 1. Se T ha n autovalori reali e distinti, T è diagonalizzabile

2. gli autospazi di T sono in somma diretta

prova $\{\lambda_1 - \lambda_n\}$ autovalori distinti con autovettori $v_1, -, v_n$. questi sono indipendenti. Dato che $\dim V = n$, essi costituiscono una base di V.

2. $V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right) = \{0\}$

perché se $v \in V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right)$

$T(v) = \lambda_i v = \sum_{j \neq i} w_j$ dove $T(w_j) = \lambda_j w_j$

e questo è una relazione di dipendenza lineare fra autovettori con autovalori tutti diversi. $\Rightarrow v = 0$.

<u>Teorema</u> (1° criterio di diagonalizzabilità)

$T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ i suoi autovalori $\lambda_1, -, \lambda_k$ sono tutti reali e per ogni $j = 1, -, k$ $m_a(\lambda_j) = m_g(\lambda_j)$

<u>Prova</u> T diagonalizzabile $\Rightarrow$ V ha una base di autovettori $\Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \Rightarrow$ gli autovalori sono reali e $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = n$

Dato che $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ e $\sum m_a(\lambda_i) = n$ perché gli autovalori sono tutti reali si deve avere $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

Viceversa se gli autovalori sono tutti reali e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ si ha

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_1} \oplus \quad \oplus V_{\lambda_k})$$

Quindi $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ e V ha una base fatta di autovettori di T.

<u>Osservazione</u> Per provare che in genere $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ si può fare così

Prendiamo una base di V_{λ_i} e completiamola a base di V. Allora la matrice di T in questa base è

$$\begin{array}{c} m_g(\lambda_i) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_i I & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

per cui $\det(A - xI) = (\lambda_i - x)^{m_g(\lambda_i)} \det(C - xI)$

e può essere che λ_i sia radice anche del polinomio caratteristico di C.

Polinomi che si annullano su una matrice

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_j x^j$, $p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_j A^j$ quindi se $p(A) = 0$ abbiamo una relazione di dipendenza lineare tra I e le potenze di A. Ora $A \in M(n,n)$ che è uno spazio vettoriale di dimensione n^2, quindi non tutte le potenze di A possono essere indipendenti. Questo prova che

$$I_A = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(A) = 0 \} \neq \{0\}$$

Quindi I_A contiene polinomi di grado minimo e tra questi ce ne è uno solo fatto così

$$m_A(x) = x^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i$$

Questo si chiama POLINOMIO MINIMO di A ed è lo stesso per tutte le matrici B simili ad A

Infatti se $B = M^{-1}AM$ $\quad B^i = M^{-1}A^iM$ e quindi

$$\min_B(B) = M^{-1} \min_A(A) M = M^{-1} \cdot 0 \cdot M = 0$$

Anzi si ha proprio $I_A = I_B = I_I$

Lemma: $p(x) \in I_A \Rightarrow p(x)$ è un multiplo di $m_A(x)$. Inoltre se λ è autovalore (reale o complesso) di A λ è radice di $p(x)$ per ogni $p(x) \in I_a$.

<u>prova</u> Dividiamo $p(x)$ per $m_A(x)$

$$p(x) = m_a(x) \cdot q(x) + r(x)$$

dove ~~deg~~ grado $r(x)$ < grado $m_a(x)$

Calcoliamo in A

$$0 = p(A) = m_A(A)\, q(A) + r(A)$$

Poiché $m_A(A) = 0$ si deve avere $r(A) = 0$
quindi $r(x) \in I_A$, ma ha grado < minimo
$\Rightarrow r = 0$ e p è un multiplo di m_A

Se λ è autovalore di A e $v \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) è autovettore di λ, $\Rightarrow Av = \lambda v$ $A^2 v = A(Av) = \lambda^2 v$, $A^i(v) = \lambda^i v$, quindi

$$p(A)v = p(\lambda) \cdot v \qquad v \neq 0 \Rightarrow p(\lambda) = 0.$$

2° criterio di diagonalizzabilità.
$T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_T(x)$ ha radici tutte reali e di molteplicità 1 come radici di $m_T(x)$

Prova Se T è diagonalizzabile i suoi autovalori sono reali e $V = V_{\lambda_1} \oplus \quad \oplus V_{\lambda_k}$

Proviamo che $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_k)$ si annulla su T e o sulla matrice diagonale associata alla base $\mathcal{B}_1 \cup - \cup \mathcal{B}_k$ dove $\mathcal{B}_j$ è una base di V_{λ_j}

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & \\ & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix} \qquad \text{dove } m_j = m_g(\lambda_j)$$

Allora $A - \lambda_k I$ si annulla su V_k mentre vale $(\lambda_j - \lambda_k)I$ sugli altri addendi. Quindi

$\cancel{(A - \lambda_j I)}$

$(A-\lambda_j I)(A-\lambda_{j+1} I) \cdots (A-\lambda_k I)$ si annulla su $V_j \oplus V_{j+1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

e dunque $(A-\lambda_1 I) \cdots (A-\lambda_k I)$ si annulla su V

quindi $m_T(x) = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_k)$

Viceversa se $m_T(x) = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_k)$ gli autovalori sono reali e si ha

Lemma Se $V \subset \mathbb{R}^n$ è invariante per A, gli autovalori di $A|_V : V \to V$ sono reali e $m_{A|_V}$ ha solo fattori semplici $A|_V$ è diagonalizzabile.

<u>prova</u> per induz. sul numero k di autovalori

Se $k = 1$ $m_A(x) = x - \lambda_1 \Rightarrow m_A(A) = A - \lambda_1 I = 0$
$\Rightarrow A = \lambda_1 I$ è diagonale.

$k-1 \Rightarrow k$ Scriviamo $(A-\lambda_1 I) \cdots (A-\lambda_k I) = 0$

quindi $\mathrm{Im}(A-\lambda_k I) \subset \mathrm{Ker}\left[(A-\lambda_1 I) \cdots (A-\lambda_{k-1} I)\right] = V$
e

$$\dim \mathrm{Im}(A-\lambda_k I) \leq \dim V$$

sommiamo ad entrambi i membri $\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda_k I) = \dim V_{\lambda_k}$ otteniamo:

$$n \leq \dim V_{\lambda_k} + \dim V$$

1. $V_{\lambda_k} \cap V = \{0\}$. Sia $v \in V_{\lambda_k} \cap V$

$\Rightarrow Av = \lambda_k v = (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_1) v = 0$
Ma $v \in V_{\lambda_k}$ se fosse $\neq 0$ il 2° membro sarebbe $\neq 0$

quindi $v = 0$ e $\dim V + \dim V_k = n$
Ora V è invariante per A e il polinomio minimo di $A|_V$ è $(x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_{k-1})$.

Per ipotesi induttiva $A|_V$ è diagonalizzabile, cioè

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_{k-1}}$$

Quindi $\mathbb{R}^n = V \oplus V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ e A è diagonalizzabile

Abbiamo provato il secondo criterio.
Nelle dispense già in rete c'è una prova di questo criterio provato per induzione su k, ma non è scritto a mano.