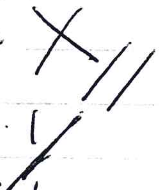
Lezione 1 29.9.2021

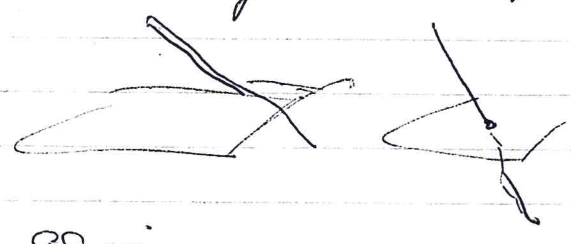
Sappiamo da Euclide: per 2 punti distinti passa una retta, per 3 punti non allineati passa un piano.

Posizione di rette e piani

- 2 rette distinte possono essere incidenti
  parallele
  sghembe



- se non sono sghembe sono complanari, cioè c'è un piano che le contiene entrambe
- due piani distinti possono essere incidenti o paralleli. Nel primo caso la loro intersezione è una retta.
- una retta ed un piano, r e P, possono essere
  - $r \subset P$ cioè la retta giace sul piano
  - paralleli
  - incidenti



Non ci sono altri casi

Ora mettiamo le coordinate.

Sia r una retta e $O, U \in r$ due punti distinti di r.

Allora se $P \in r$ si deve avere

$$P - O = t(U - O)$$

dove con $P - O$ intendiamo il segmento $\overline{OP}$ orientato da O verso P. $P - O$ è un multiplo di $U - O$ e t è il coefficiente. Se $t > 0$ P sta nella semiretta di origine O che contiene U. Se $t < 0$ P si trova nella semiretta opposta. Se $t = 0$ allora $P = O$.

Quindi se $P \in r$ troviamo $t \in R$ che lo rappresenta. Viceversa se $t \in R$ c'è un unico P sulla retta r tale che $P - O = t(U - O)$.

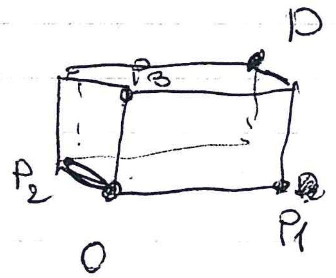
Abbiamo spalmato sulla retta i numeri reali.

Ora mettiamo coordinate nello spazio.

- prendiamo 3 rette per un punto O perpendicolari fra loro
- Scegliamo $U_1 \in r_1$, $U_2 \in r_2$, $U_3 \in r_3$ in modo che i segmenti $\overline{OU_1}$, $\overline{OU_2}$ e $\overline{OU_3}$ siano lunghi uguali
- ora se P è un punto qualunque, c'è un unico piano per P perpendicolare a r_1. Il punto di incontro è $P_1 \in r_1$. Analogamente troviamo $P_2 \in r_2$, $P_3 \in r_3$.

Per quanto visto sulla retta $P_1 - O = x(U_1 - O)$, $P_2 - O = y(U_2 - O)$ $P_3 - O = z(U_3 - O)$

Costruiamo il parallelepipedo con un vertice in O, lati $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_3}$, in modo che il vertice opposto ad O sia P



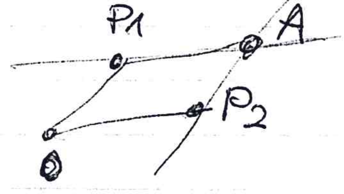
Possiamo dire

$P = (x, y, z)$

Abbiamo spaziato $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ nello spazio ordinario.

<u>Esercizio</u> Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_2)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Consideriamo l'unico parallelogramma che ha per vertici O, P_1, P_2 e sia A il quarto vertice



Dimostrare che A ha coordinate $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Ora scriviamo le equazioni parametriche della retta r per P_0 e P_1 $P_0 \neq P_1$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Se $P = (x, y, z)$ è un punto di r si deve avere:

$$P - P_0 = t\,(P_1 - P_0) \quad \text{ovvero}$$

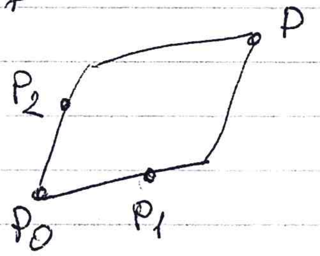
$$\begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t\,(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Notate che i coefficienti di t: $(x_1 - x_0)$, $(y_1 - y_0)$ e $(z_1 - z_0)$ non possono essere tutti 0 perché $P_1 \neq P_0$.

Analogamente si scrive il piano per 3 punti

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0),\quad P_1 = (x_1, y_1, z_1),\quad P_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

Se P è un punto del piano, c'è un unico parallelogramma con i lati paralleli a $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ con un vertice in P_0 e quello opposto in P



Quindi $P - P_0 = t\,(P_1 - P_0) + s\,(P_2 - P_0)$ ovvero

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1 - x_0) + s\,(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1 - y_0) + s\,(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t\,(z_1 - z_0) + s\,(z_2 - z_0) \end{cases}$$

Possiamo eliminare t e s. I coeff. di s non sono tutti nulli perché $P_2 \neq P_0$. Poniamo che sia $x_2 - x_0 \neq 0$. Allora

$$s = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(x - x_0 - t\,(x_1 - x_0)\right).$$

Lo sostituiamo nelle altre 2 equazioni

$$s = \frac{1}{x_2-x_0}\left(x - x_0 - t(x_1-x_0)\right) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} - t\,\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$$

$$y = y_0 + t(y_1-y_0) + \left[\frac{x-x_0}{x_2-x_0} - t\,\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\right](y_2-y_0)$$

$$z = z_0 + t(z_1-z_0) + \left[\frac{x-x_0}{x_2-x_0} - t\,\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\right][z_2-z_0]$$

Riscriviamo

$$s = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} - t\,\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$$

$$y = y_0 + \frac{(x-x_0)(y_2-y_0)}{x_2-x_0} + t\left[y_1-y_0 + \frac{(y_2-y_0)(x_1-x_0)}{x_2-x_0}\right]$$

$$z = z_0 + \frac{(x-x_0)(z_2-z_0)}{x_2-x_0} + t\left[z_1-z_0 - \frac{(x_1-x_0)(z_2-z_0)}{x_2-x_0}\right]$$

Ora i 2 coefficienti di t: $\dfrac{(x_2-x_0)(y_1-y_0)+(y_2-y_0)(x_1-x_0)}{x_2-x_0}$

e $\dfrac{(x_2-x_0)(z_1-z_0)-(x_1-x_0)(z_2-z_0)}{x_2-x_0}$

non sono entrambi nulli. Possiamo eliminare t e sostituirlo nella altra equazione. Alla fine otteniamo un'equazione del tipo

$$ax+by+cz+d=0$$

dove a,b,c non sono tutti e 3 nulli

E' un polinomio in x, y, z di grado 1.
che rappresenta il piano per P_0, P_1, P_2

Sarà vero che ogni equazione di primo grado rappresenta un piano?

Sì. prendiamo un'equazione di grado 1

$$ax + by + cz + d = 0$$

e scegliamo 3 soluzioni

Per esempio $\left(0, 1, \frac{d-b}{c}\right)$ (se $c \neq 0$, $a \neq 0$)

$$\left(1, 0, \frac{d-a}{c}\right)$$

$$\left(\frac{d-b}{a}, 1, 0\right)$$

Scriviamo le eq. parametriche del piano per questi 3 punti, eliminiamo i parametri. Troviamo la stessa equazione o un suo multiplo.

Dunque: un piano è l'insieme delle soluzioni di un'equazione di grado 1

Attenzione una soluzione è una terna di numeri

Otteniamo un criterio facile.

$$ax+by+cz+d=0 \quad e$$

$$ax+by+cz+d'=0 \qquad \text{con } d \neq d'$$

sono piani paralleli: infatti non si incontrano.

Alterando il termine noto si ottiene un piano parallelo.

Se eliminiamo il parametro di una retta, otteniamo due equazioni di primo grado. Sono le equazioni di due piani che si intersecano nella retta.

Ma per una retta passano infiniti piani. Come li trovo.

Sia $r = \begin{cases} f=0 \\ g=0 \end{cases}$ f, g polinomi in x, y, z di grado 1

Allora per ogni coppia di numeri reali $(a,b) \neq (0,0)$

$$af+bg=0$$

è l'equazione di un piano che passa per r.

infatti i punti di r ~~verificano~~ sono soluzioni sia di f che di g. Sono tutti così!

Sì parimenti. Fissiamo $P_0 \notin r$. Allora

c'è un unico piano che passa per r e per P_0. Vediamo se ci sono a, b tali che l'equazione di questo piano è

$$af + bg = 0$$

P_0 avrà coordinate (α, β, γ) e siccome $P_0 \notin r$ i due numeri

$f(\alpha, \beta, \gamma)$ e $g(\alpha, \beta, \gamma)$ non possono essere entrambi nulli. Quindi nell'equazione

$$af(\alpha, \beta, \gamma) + bg(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

possiamo ricavare b in funzione di a, o a in funzione di b

Addirittura possiamo prendere

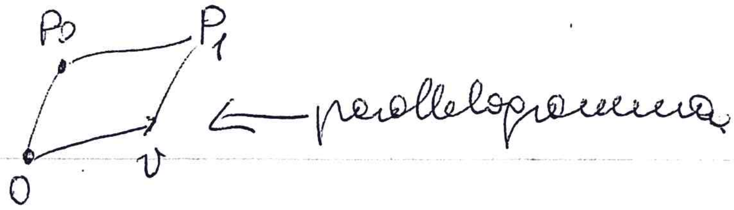
$$a = g(\alpha, \beta, \gamma) \ , \quad b = -f(\alpha, \beta, \gamma)$$

e a, b non sono entrambi nulli e

$$g(\alpha, \beta, \gamma) f - f(\alpha, \beta, \gamma) g = 0$$ è l'eq di un piano che passa per r e per P_0.

Vettori

Dato un segmento orientato $P_1 - P_0$, c'è un unico segmento orientato con lo stesso lunghezza, direzione e verso di $P_1 - P_0$, con primo estremo O. Questo lo chiamiamo <u>vettore</u>.



lo chiamiamo $\vec{v}$ o v

Esempio $e_1 = V_1 - O$, $e_2 = V_2 - O$, $e_3 = V_3 - O$

e allora se $\vec{v} = (a, b, c)$ possiamo scrivere

$$\vec{v} = a e_1 + b e_2 + c e_3$$

Proiezione ortogonale su un piano (o su una retta).

Fissiamo un piano ρ passante per O.
Per ogni vettore $\vec{v} = V - O$ c'è un'unica retta per V ortogonale a ρ e questa retta interseca ρ in un punto V'

Diciamo che $\vec{v}' = V' - O$ è la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su ρ e lo scriviamo

$$\vec{v}' = pr\,\vec{v}$$

Per il teorema di Talete vediamo subito che $pr(a\vec{v}) = a\, pr(\vec{v})$

(le rette per la testa di $\vec{v}$ e di $a\vec{v}$ sono parallele e tagliate da due trasversali, la retta che contiene O e V e quella che contiene O e V').

Ma la proiezione ortogonale porta rette parallele in rette parallele, quindi parallelogr.

in parallelogrammi.

In particolare il parallelogramma con vertici $(0, V^1, V^2, V^1+V^2)$ si trasforma per proiezione nel parallelogramma $(0, pr V^1, pr V^2, pr(V^1+V^2))$

e quindi $pr(V^1+V^2) = pr V^1 + pr V^2$

Passando ai vettori $pr(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = pr\, \vec{v}_1 + pr\, \vec{v}_2$ sempre per la regola del parallelogramma

La stessa cosa succede se proiettiamo ortogonalmente su una retta

Ancora $pr_2(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = pr_2(\vec{v}_1) + pr_2(\vec{v}_2)$

$$pr_2(a\vec{v}) = a\, pr_2 \vec{v}$$

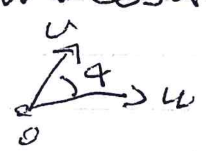
Questo ci serve per il prodotto scalare

Prodotto scalare.

v, w vettori in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

Def $\langle v, w \rangle$ = lungh v · lungh w · $\cos\alpha$ dove

α è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$



Per brevità scriviamo $|\vec{v}|$ per lunghezza $\vec{v}$

proprietà

1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

2) $|v| \cos\alpha$ è la lunghezza di $pr(v)$ se $\cos\alpha > 0$ (angolo acuto) e $-|pr\, v|$ se $\cos\alpha < 0$ (angolo ottuso)

3) Possiamo scrivere $w_1 = \frac{w}{|w|}$, per cui w_1 è un vettore di lunghezza 1 sulla stessa retta di w e con lo stesso verso.

4) se $v' = pr\, v \Rightarrow v' = \pm |v'| \, w_1$, ovvero

$$v' = |v| \cos\alpha \; w_1$$

quindi $\quad v' = \langle v, w_1 \rangle \cdot w_1$

5) poiché v' è la proiezione ortogonale di v sulla retta di w_1, risulta

se $v = v_1 + v_2$, allora

$$v' = \langle v, w_1 \rangle \cdot w_1 = v_1' + v_2' = \langle v_1, w_1 \rangle w_1 + \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$

$\langle a v, w_1 \rangle = a \langle v, w_1 \rangle$ per le proprietà della proiezione.

Abbiamo dimostrato

$$\langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$$

$$\langle a v, w\rangle = a\langle v, w\rangle$$

e per simmetria

$$\langle v, w_1+w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$$

$$\langle v, a w\rangle = a\langle v, w\rangle$$

cioè che $\langle\, ,\rangle$ è lineare in entrambe le variabili, è bilineare

qui lineare significa: $\langle\, ,\rangle$ rispetta la somma e il prodotto per un numero (sia nella prima variabile, sia nella seconda)

Di più se $\vec{v} = a e_1 + b e_2 + c e_3$
e $\vec{w} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle a e_1 + b e_2 + c e_3, \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\rangle =$$

$$a\alpha\langle e_1, e_1\rangle + b\alpha\cancel{\langle e_2, e_1\rangle} + c\alpha\cancel{\langle e_3, e_1\rangle} +$$
$$+ a\beta\cancel{\langle e_1, e_2\rangle} + b\beta\langle e_2, e_2\rangle + c\beta\cancel{\langle e_3, e_2\rangle} +$$
$$+ a\gamma\cancel{\langle e_1, e_3\rangle} + b\gamma\cancel{\langle e_2, e_3\rangle} + c\gamma\langle e_3, e_3\rangle$$

$$= a\alpha + b\beta + c\gamma$$

che è più semplice da usare.