Lezione 2 30.9.2021

- Ricapitolazione di quanto fatto nella lezione 1
- vettori in $\mathbb{R}^3$
  - si possono sommare
  - si possono moltiplicare per numeri reali.

le regole sono quelle della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$.

In particolare:

- C'è un elemento neutro per la somma

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v = v$$

- c'è un vettore opposto $-v$ tale che $v - v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad -v = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$
- il prodotto è distributivo rispetto alla somma

$$a(v_1 + v_2) = a v_1 + b v_2$$

Tutto ciò dà una struttura a $\mathbb{R}^3$, struttura che rivedremo di SPAZIO VETTORIALE.

- Abbiamo introdotto il prodotto scalare

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos\alpha$$

dove $|v| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (Pitagora) se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
e α è l'angolo fra i 2 vettori

Abbiamo dimostrato che se p è la proiezione ortogonale sulla retta che contiene w si ha

$$v' = p(v) = \langle v, w \rangle w_1 \quad \text{dove} \quad w_1 = \frac{w}{|w|}$$

Poiché le proiezioni ortogonali rispettano somma e prodotto, abbiamo dedotto le proprietà del prodotto scalare

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$$

$$\langle a v, w \rangle = a \langle v, w$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$$
$$\langle v, a w \rangle = a \langle v, w \rangle$$

Valendo queste proprietà, poiché se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ si ha $v = x e_1 + y e_2 + z e_3$ e $w = x' e_1 + y' e_2 + z' e_3$, abbiamo ottenuto

$$\langle v, w \rangle = x x' + y y' + z z'$$

<u>Applicazione</u> Prendiamo un piano passante per $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La sua equazione è quindi

$$a x + b y + c z = 0$$

Ora ogni vettore del piano $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ verifica

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$ Questo significa

che il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è perpendicolare al piano.

Se è perpendicolare al piano, è perpendicolare a tutti i piani a lui paralleli. Quindi

Se $ax+by+cz+d=0$ è l'equazione di un piano $\mathcal{P}$, il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è perpendicolare a $\mathcal{P}$.

Esercizi

1) dato il piano $\mathcal{P}$ $ax+by+cz+d=0$, scrivere le equazioni della retta per P_0 perpendicolare a $\mathcal{P}$.

2) data la retta $r: X = P_0 + t\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ scrivere l'eq. del piano per $P_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ perpendicolare a r

Soluzione 1) Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

le eq. parametriche di r sono

$$X = P_0 + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

2) Ogni piano perpendicolare a r ha equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0 \qquad \text{al variare di } d$$

Imponiamo che passi per $P_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + d = 0 \Rightarrow d = -(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3)$$

Generalizzazioni

Consideriamo $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ volte}}$

Un elemento (vettore) di $\mathbb{R}^n$ è una n-upla $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ di numeri reali.

Quindi in $\mathbb{R}^n$ è definita una somma + e un prodotto con le stesse proprietà di $\mathbb{R}^3$.

In particolare, elemento neutro è il vettore nullo
$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Esistono n vettori un po' speciali

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{——}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ che "generano"

tutti i vettori nel senso che

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Anche in $\mathbb{R}^n$ c'è un prodotto scalare con tutte le proprietà di quello di $\mathbb{R}^3$.

$$\langle v, w \rangle = |v| |w| \cos \alpha$$

dove se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $|v| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ (ancora Pitagora! Scrivendo v e $w = \begin{pmatrix} x' \\ x^n \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $e_1, \dots, e_n$ otteniamo

$$\langle v, w \rangle = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \cdots + x_n x_n'$$

come