**Nome:** **Matricola:**

**Algebra Lineare**

**Terzo appello 21/02/2019**

**Esercizio 1.**
Siano

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, v_3 = (t+1, t+1, t)^T$$

tre vettori in $\mathbb{R}^3$, dove $t$ è un parametro reale.

Per quali valori di $t$ esiste una applicazione ortogonale che porta la base canonica in $(v_1, v_2, v_3)$?

**Esercizio 2.**
Siano $U, V \subset \mathbb{R}^5$ i sottospazi così definiti.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, x_4 - x_5 = 0\},$$

$$V = span\{e_1 + e_2, e_4 - e_5\}.$$

- Calcolare $\dim U \cap V$ e $\dim U + V$.
- Costruire, se esiste, una applicazione lineare non nulla $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $T(V) \subset U$ e $T(U) \subset T(V)^\perp$.
- L'applicazione lineare costruita è invertibile? Se non lo è, determinarne il nucleo.

**Esercizio 3.**
Si consideri lo spazio vettoriale $V$ delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali e sia $f : V \to V$ definita da $f(A) = -A + 7A^T$.

1. Dimostrare che $f$ è lineare.
2. Calcolare $f(A)$ quando $A$ è una matrice simmetrica.
3. Dimostrare che $f$ ha solo due autovalori e determinare i due autospazi.
4. Dimostrare che $f$ è diagonalizzabile.
5. Provare che $f$ è surgettiva e calcolare $f^{-1}(B)$, dove $B$ è una matrice qualunque.