Lezione 3 13.10.2021

Abbiamo visto la struttura di $\mathbb{R}^n$ rispetto a somma e prodotto per uno scalare. Queste operazioni verificano le seguenti proprietà:

- per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(u+v)+w = u+(v+w)$
- $\exists\, 0 \in \mathbb{R}^n : \forall v \in \mathbb{R}^n$ $v+0 = 0+v = v$
- $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\exists -v \in \mathbb{R}^n : v+(-v) = (-v)+v = 0$
- $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ $v+w = w+v$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
- $\forall \lambda \mu \in \mathbb{R}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $1 \cdot v = v$ e $0 v = \vec{0}$

Le stesse proprietà valgono per

$M(p, q, \mathbb{R})$ = matrici p righe e q colonne a coefficienti reali $A \in M(p, q, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Come ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si scrive in modo unico come

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

dove
$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{posto } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Ogni matrice $A \in M(p, q, \mathbb{R})$ si scrive in modo unico come

$$A = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij} E_{ij}$$

dove
$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \text{riga } i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
colonna j

ha 1 nel posto (i, j) e 0 altrove.

Definizione k vettori $v_1, \dots, v_k$ (o k matrici) sono linearmente DIPENDENTI se esistono numeri reali $a_1, \dots, a_k$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0 \quad \text{(vettore nullo)}$$

Sono INDIPENDENTI se

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = 0, \dots, a_k = 0$$

(L'unico modo di avere una combinazione lineare di $v_1 \dots v_k$ che dia 0 è prendere tutti i coeff. $= 0$).

Se prendete $e_1, -, e_n$ vedete che sono indipendenti, inoltre se aggiungete un qualunque altro vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $e_1, -, e_n, v$ sono dipendenti $\left(x_1 e_1 + \quad + x_n e_n - v = 0 \text{ se } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ quindi $\{e_1, -, e_n\}$ è un insieme MASSIMALE di vettori indipendenti

$e_1 - e_n$ generano $\mathbb{R}^n$ perché ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è loro combinazione lineare. Ma se ne tolgo uno non generano più tutto $\mathbb{R}^n$, quindi è un insieme MINIMALE di generatori.

La cosa si ripete identica per $M(p, q, \mathbb{R})$ se prendete le $p \times q$ matrici $E_{11}, E_{12}, -, E_{1q}$, $E_{2,1}, \dots, E_{2q}, \dots \quad E_{p1}, E_{p2}, \dots \quad E_{pq}$.

Chiameremo BASE di $\mathbb{R}^n$ o di $M(p, q, \mathbb{R})$ ogni insieme massimale di vettori indipendenti che sia anche un insieme minimale di generatori

Terzo esempio $\mathbb{R}[x] =$ ~~{polinomi in x e coeff. reali~~

$= \{$polinomi in x e coeff. reali$\}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

È facile vedere che anche $\mathbb{R}[x]$ ha una base, ma questa base non è finita. Essa è data da

$$\{1, x, x^2 \dots x^n, x^{n+1} \dots\}$$

$\mathbb{R}[x]$ ha una somma e un prodotto per scalare come $\mathbb{R}^n$ e $M(p, q, \mathbb{R})$ e verifica le 8 proprietà di prima.

I polinomi $\{1, x, x^2 \dots\}$ sono indipendenti e generano $\mathbb{R}[x]$ perché ogni polinomio è comb. lineare dei primi k, se k è il suo grado.

Diremo che $\mathbb{R}^n$, $M(p, q, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]$ sono SPAZI VETTORIALI.

$\mathbb{R}^n$ ha qualcosa in più: il prodotto scalare che ci dà: • lunghezza di un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\langle v, v \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = (\text{lungh. } v)^2$$

• distanza $d(P, Q)$

$P = (x_1 - x_n)$, $Q = (y_1 - y_n)$ $\quad (d(P,Q))^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$.