Lezione 4 14.10.2021

Sistemi lineari

$ax = b \quad a, b \in R$

$a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1}b$

$$a = 0 \begin{cases} b \neq 0 & \text{nessuna soluzione} \\ b = 0 & \text{ogni } x \in \mathbb{R} \text{ è soluzione} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ infinite soluzioni

Già in questo caso si vede che succedono cose diverse.

In generale un sistema lineare è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x^q = b_q \end{cases}$$

e si cercano le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in R^q$

Di fatto stiamo intersecando p iperpiani e vogliamo sapere l'insieme S ~~di~~ intersezione

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pq} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ | \\ b_p \end{pmatrix}$

Se chiamiamo A_i le righe di A e A^j le sue colonne vediamo subito che

- A^1 è moltiplicato per x_1, A^2 per x_2, $\dots$ A^q per x_q
- quindi il sistema ha soluzione se B è combinazione lineare delle colonne di A.
- Non solo: se $v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$ e conveniamo di dire $Av = u_1 A^1 + \cdot + u_q A^q$ vediamo che A associa a v un vettore di $\mathbb{R}^p$ precisamente $w = u_1 A^1 + \dots + u_q A^q \in \mathbb{R}^p$

Quindi $A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e verifica $A(v_1+v_2) =$

$$= A(v_1) + A(v_2)\ ,\ A(cv) = c(Av)$$

cioè A è LINEARE

Allora $S = \{\text{soluzioni}\} = \{X \in \mathbb{R}^q : AX = B\}$

Ma tutto ciò non ci aiuta a trovare S.

La strategia è cambiare gli equazioni senza cambiare S.

MOSSE DI GAUSS

1. Cambiare l'ordine delle equazioni

2. Sostituire l'equazione E_i con $E_i + kE_j$

1. non cambia S

2. vediamo: 2 sistemi

$$\begin{array}{llll} & E_1 & E_1 & \\ & \vdots & \vdots & \\ & E_j & E_j & \text{nuovo} \\ \text{vecchio} & \vdots & \vdots & \\ & E_i & E_i + kE_j & \\ & \vdots & \vdots & \\ & E_p & E_p & \end{array}$$

Se X è soluzione del vecchio $A_i(X) = b_i$

$A_j(X) = b_j$

$(A_i + kA_j)(X) = A_i(X) + kA_j(X) =$
$b_i + kb_j$ $\Rightarrow$ X è soluz. del nuovo

Se X è soluzione del nuovo E_j è verificata da X e anche $E_i + kE_j$. Ma $E_i = (E_i + kE_j) - kE_j$

X verifica $E_i + kE_j$ e anche E_j e quindi anche $kE_j \Rightarrow$ X verifica E_i

Anche 2. non cambia S.

Applichiamo le mosse di Gauss su A B.

Se $a_{11} \neq 0$ eseguo

$$R_2 \longrightarrow R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1 \quad \text{otteniamo} \quad \begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & & a_{1q} \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ | & & & \\ 0 & & & \end{array}$$

$$R_p \to R_p - \frac{a_{p1}}{a_{11}} R_1$$

e ricominciamo da capo con A'

se $a_{11} = 0$ ma c'è in A' qualche altro elem. $\neq 0$, poniamo $a_{31} \neq 0$ portiamo (mossa 1) la riga 3 in prima posizione e rifacciamo il conto.

Alla fine otteniamo una matrice a scala e possiamo risolvere dall'ultima equazione via via sostituendo.

Esempio

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & B \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

mossa 1 porto R_2 sopra R_1

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 5R_1 \\ R_4 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 9 & -7 & 12 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 9 & -7 & 12 & -5 \end{array}$$

portiamo R_4 sopra R_2

$R_3 \longrightarrow R_3 + 2R_2$

$R_4 \longrightarrow R_4 + 9R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

$R_4 \longrightarrow R_4 + 2R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 17 \end{pmatrix}$$

$22x_4 = 17 \qquad x_4 = \frac{17}{22}$

$-x_3 + \frac{5 \cdot 17}{22} = 2 \qquad x_3 = \frac{5 \cdot 17}{22} - 2$

$-x_2 + \frac{5 \cdot 17}{22} - 2 = 2$

$x_2 = \frac{5 \cdot 17}{22} - 4$

$\cancel{x_1} \; x_1 - \left(\frac{5 \cdot 17}{22} - 4\right) + 2\left(\frac{5 \cdot \cancel{17}}{\cancel{22}} - 2\right) - \cancel{2 \cdot \frac{17}{22}} = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5 \cdot 17}{22} \\ x_2 = \frac{5 \cdot 17}{22} - 4 \\ x_3 = \frac{5 \cdot 17}{22} - 2 \\ x_4 = \frac{17}{22} \end{cases}$$

è l'unica soluzione.

<u>Osservazione</u> se ~~una~~ la colonna j è fatta solo di 0 il sistema non impone nulla alla variabile x_j. Risolvete il sistema senza quelle colonne e date a x_j un valore qualunque.

Se facendo la scala arrivate ad una equazione $0 = c \neq 0$

il sistema non ha soluzioni

~~Se~~ gli scalini sono più lunghi.

Alla fine del processo ottenete delle equazioni che cominciano con un termine $\neq 0$

Ad esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_3 - x_4 + x_5 = 61 \\ 4x_5 = 8 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Allora 1, 2, 4 sono i pivots

x_2 e x_4 non portano pivots, li portiamo a secondo membro

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 1 - x_2 - x_4 \\ 2x_3 + x_5 = 61 + x_4 \\ 4x_5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \\ 2(x_3 + 1) = 61 + x_4 \\ x_5 = 2 \end{matrix}$$

$x_1 = -1 - \frac{59}{2} - x_2 - 2x_4$
$x_3 = 59/2 + x_4$
$x_5 = 2$

$2x_3 + 2 = 61 + x_4$

$x_3 = \frac{61}{2} - 1 + x_4 = \frac{59}{2} + x_4$

$x_1 + \frac{59}{2} + x_4 + 2 = 1 - x_2 - x_4$

Quindi le infinite di soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} -\frac{61}{2} - a - b \\ a \\ \frac{59}{2} + b \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$$

soluzioni che dipendono da 2 parametri
per cui ho un piano di soluzioni.

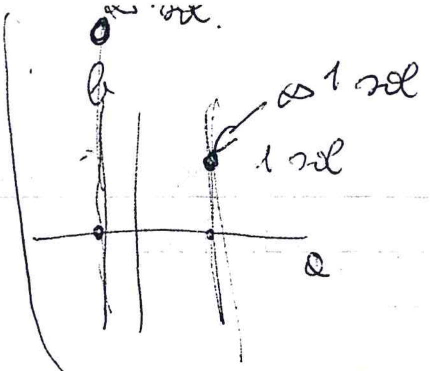
Esercizio d'esame

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ ax + y - 3z = 3 - b \\ (a+1)y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ a & 1 & -3 & 3-b \\ \cancel{0}(a+1) & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - aR_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -3+a & 3-a-b \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -3+a & 3-a-b \end{pmatrix}$$

R_3 lo scambio con R_2

$(1-a^2) = (a+1)(1-a)$ quindi posso fare $R_3 - (1-a)R_2$



nelle rette senza i 2 punti 0 sol.

viene: $\begin{array}{cccc} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-4 & 2-b \end{array}$

discutiamo

se $a \neq -1, 2$ ho 3 pivots
una sola soluzione
qualsiasi sia b

se $a = -1$ ho solo 2 pivots
La seconda equazione è

$$z = 1$$

la terza è $-6z = 2-b$

quindi o $\frac{b-2}{6} = 1$ cioè $b = 8$

e allora ci sono infinite soluzioni che dipendono da y.

oppure $b \neq 8$ e allora non ci sono soluzioni

Se $a = 2$, l'ultima equazione dice

$$0 \cdot z = 2-b$$

Se $b = 2$ abbiamo infinite soluz. dipendenti da z. Se $b \neq 2$ non ci sono soluzioni