Nome: **Matricola:**

ALGEBRA LINEARE

Quinto appello 02/07/2019

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $T : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ dallo spazio delle matrici quadrate di ordine n in sé così definita:

$$T(A) = 2A - A^T$$

- Dimostrare che T è diagonalizzabile.
- Dimostrare che T è surgettiva.
- Calcolare $T^{-1}(B)$ per ogni matrice $B \in M(n, \mathbb{R})$.

Esercizio 2.

Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e sia $T_a : V \to V$ l'applicazione cosí definita.

$$T(p(x)) = (x^2 + 1)p"(ax)$$

$(p"(x)$ è la derivata seconda di $p(x), a$ è un numero reale.

- Dimostrare che T_a è lineare.
- Calcolare il rango di T_a per ogni a.
- Determinare i valori di a per cui T_a è diagonalizzabile.

Esercizio 3.

Siano r, s, t tre rette sghembe a due a due e a due adue perpendicolari nello spazio a tre dimensioni e sia p un punto fissato. Dimostrare che esistono tre piani P_1, P_2, P_3 passanti per p e perpendicolari rispettivamente a r, a s e a t. Dimostrare che ognuno dei piani trovati è perpendicolare agli altri due.

Attenzione: l'esercizio è risolvibile e molto facile. In alternativa potete risolvere l'esercizio seguente, parecchio più impegnativo, non fosse altro, per i conti.

Esercizio 3'. Sia r la retta $(0, 0, 1) + t(1, 1, 1)$, sia s $(0, 1, 0) + s(1, -1, 0)$ e sia t la retta intersezione dei due piani di equazioni rispettivamente $x - y = 0$ e $z = -2y$.

1. Verificare se le tre rette sono a due a due perpendicolari oppure no.
2. Verificare se le tre rette sono sghembe oppure no.
3. Dimostrare che per ogni punto p passano tre piani P_1, P_2, P_3 perpendicolari rispettivamente a r, a s e a t.
4. Verificare che se le tre rette sono a due a due perpendicolari, anche i tre piani sono a due a due perpendicolari.