Lezioni 27-28 ~~ottobre~~ 2021

Sia A una matrice $p \times q$ a coefficienti reali
Allora A definisce una applicazione

$$A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

data da: sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$ $\quad AX = x_1 A^1 + \dots + x_q A^q \in \mathbb{R}^p$

A è LINEARE, cioè $A(X+Y) = AX + AY$ e ~~$A(cX)$~~ $=$
e $A(cX) = c(A(X))$.

A definisce due sottoinsiemi uno di $\mathbb{R}^q$ e uno di $\mathbb{R}^p$

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathbb{R}^q \mid AX = 0 \in \mathbb{R}^p\}$$

$$\operatorname{Im} A = \{B \in \mathbb{R}^p \mid AX = B \text{ ha soluzione}\} =$$

$$= \{B \in \mathbb{R}^p \mid B \text{ è combinazione delle colonne di } A\}$$

Sia $\operatorname{Ker} A$ che $\operatorname{Im} A$ sono SOTTOSPAZI uno di $\mathbb{R}^q$, l'altro di $\mathbb{R}^p$ dove

Definizione W è sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$$
$$a \in \mathbb{R},\ w \in W \Rightarrow aw \in W$$

Sia $\operatorname{Ker} A$ che $\operatorname{Im} A$ verificano la definizione

Notate che $Ae_1 = A^1,\ Ae_2 = A^2 \dots Ae_q = A^q$

<u>Definizione</u> il sottospazio span$(v_1, \dots, v_l)$

è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ formato dalle COMBINAZIONI LINEARI di $v_1 \dots v_l$, cioè

$$\text{span}(v_1 - v_l) = \{ a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_l v_l \}$$

dove $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$.

Allora $\text{Im} A = \text{span}(A^1, \dots, A^q) \subseteq \mathbb{R}^p$

Ora generalizziamo

Definizione ~~V è~~ V insieme. Diciamo che V è uno SPAZIO VETTORIALE se possiede 2 operazioni

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad (v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \qquad (a, v) \longrightarrow av$$

che verificano

1) + è commutativa e associativa

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \qquad v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$$

2) + ha un elemento neutro (vettore nullo) 0 che verifica $0 + v = v + 0 = v$

3) Ogni vettore v ha un opposto $-v$ tale che

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

4) $(a+b)v = av + bv$, $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$

5) $abv = a(bv)$

6) $1 \cdot v = v \qquad 0 \cdot v = 0$

Esempi: $\mathbb{R}^n$, {matrici $p \times q$} $= \mathcal{M}(p,q,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[t]$,

$\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue$\}$

$\{f : A \to V\}$ dove A è un insieme qualunque e V è uno spazio vettoriale.

<u>Definizione</u>: $W \subset V$ è un sottospazio dello spazio vettoriale V se W è chiuso rispetto alle operazioni di V, cioè

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W, \quad a \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow aw \in W.$$

Esempio: $v_1 - v_e \in V$, span$\{v_1, -, v_e\}$ è un sotto-spazio di V.

<u>Definizione</u> Una BASE $\mathcal{B} = \{v_1, -, v_n, \}$ di V è un insieme ~~A~~ di vettori tali che

span $\mathcal{B} = V$ e i vettori di $\mathcal{B}$ sono indipendenti

Quindi: $\mathcal{B}$ è un insieme massimale di vettori indipendenti ed è un insieme minimale di generatori

Esempi: le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[t]$.

ATTENZIONE:

1) Se $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti ogni vettore $v \in \text{span}(v_1 - v_k)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$

Infatti se

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$$

avremo $0 = v - v = (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_k - b_k) v_k$

da cui $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ perché $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti

2) Se un insieme A di vettori contiene un insieme di generatori ~~de~~ $v_1, \dots, v_e$ di V allora $\text{span} A = V$

Infatti ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_e$ che sono elementi di A

<u>Problema</u> Ogni spazio vettoriale ha (almeno) una base?

Risposta SI però lo proveremo solo per spazi vettoriali finitamente generati.

<u>Teorema</u> Sia $V = \text{span}(v_1, \dots, v_e)$ e sia $B \subset \{v_1, \dots, v_e\}$ un insieme massimale di vettori indipendenti. Allora B è una base di V.

prova Se $v_1 \neq 0$ lo prendiamo, se $v_1 = 0$ lo scartiamo. Se v_2 è un multiplo di v_1 lo scartiamo, se no lo prendiamo.

Andiamo avanti in questo modo:

se abbiamo accumulato $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ prendiamo il prossimo v_i se $v_i \in \operatorname{span}(v_{i_1}, \dots v_{i_k})$ lo scartiamo, se no lo aggiungiamo.

Ci fermiamo quando arriviamo a v_e.

L'insieme ottenuto è massimale: sono indipendenti e tutti i vettori scartati dipendono linearmente da loro.

Se l'insieme ottenuto è

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$$

abbiamo: $v_1, \dots, v_e \in \operatorname{span} \mathcal{B}$ e $v_1 \dots v_k$ sono indipendenti. Quindi $\mathcal{B}$ è base di V. $\square$

Ci piacerebbe che tutte le basi di V avessero la stessa cardinalità, perché allora questo numero ci direbbe da quanti parametri dipende un vettore di V.

Questo sarà una conseguenza del prossimo

Teorema

Teorema (del completamento).

Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \ldots, w_k$ vettori indipendenti $k < n$.

Allora esistono $n-k$ elementi di B che insieme con $w_1, \ldots, w_k$ danno una base di V.

prova: per induzione su k.

$k=1$. Abbiamo solo w_1 e $w_1 \neq 0$ perché è indipendente

Quindi $w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ e i coefficienti $a_1, \ldots, a_n$ non sono tutti 0 perché $w_1 \neq 0$.
Non è restrittivo supporre $a_1 \neq 0$ (a meno di permutare gli elementi di B).

Se $a_1 \neq 0$ possiamo ricavare v_1

$$v_1 = a_1^{-1} w_1 - a_1^{-1} a_2 v_2 \ldots - a_1^{-1} a_n v_n$$

Quindi $v_1 \in \text{span}(w_1, v_2 \ldots v_n)$ e quindi $\text{span}(w_1, v_2 \ldots v_n) = V$ perché questo span contiene B. Ci resta da provare che $w_1, v_2, \ldots, v_n$ sono indipendenti. Supponiamo che

$$b_1 w_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n = 0$$

Vogliamo provare che $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

Sostituiamo w_1 con la sua espressione

$$0 = b_1 (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + b_2 v_2 + \quad + b_n v_n =$$
$$= b_1 a_1 v_1 + (b_1 a_2 + b_2) v_2 + \dots \quad + (b_1 a_n + b_n) v_n$$

Questa è una combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$. Tutti i coefficienti devono essere nulli

$$b_1 a_1 = 0, \; b_1 a_2 + b_2 = 0, \dots, \; b_1 a_n + b_n = 0$$

Ma $a_1 \neq 0$ quindi $b_1 = 0$, quindi $b_2 = \dots = b_n = 0$

Ora facciamo il passo induttivo
Se il completamento vale per $k-1$ vettori indipendenti vale anche per k.

Siano $w_1, \dots, w_k$ indipendenti. Anche $w_1 \dots, w_{k-1}$ lo sono. Per ipotesi induttiva possiamo supporre

$$(w_1, \dots, w_{k-1}\, v_k, \dots, v_n) = \text{base di } V$$

$$w_k = a_1 w_1 + \dots + a_{k-1} w_{k-1} + a_k v_k + \quad \dots + a_n v_n \neq 0$$

Qualcuno tra $a_k, \dots, a_n$ deve essere $\neq 0$ perché w_k è indipendente da $w_1 \dots, w_{k-1}$. Non è restrittivo supporre $a_k \neq 0$. Possiamo ricavare v_k

$$v_k = a_k^{-1}\left(w_k - a_1 w_1 - \dots - a_{k-1} w_{k-1} - a_{k+1} v_{k+1} - \dots - a_n v_n\right)$$

quindi $v_k \in \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n) = V$

cioè $w_1 \dots w_k, v_{k+1} \dots v_n$ generano V. Ci resta da provare che sono indipendenti.

$$0 = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k + b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n$$

Sostituiamo w_k con la sua espressione

$$0 = b_1 w_1 + \dots + b_k\left(a_1 w_1 + \dots + a_{k-1} w_{k-1} + a_k v_k + \dots + a_n v_n\right) + b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n$$

$$= (b_1 + b_k a_1) w_1 + \dots + (b_{k-1} + b_k a_{k-1}) w_{k-1} + b_k a_k v_k + \dots + \dots (b_n + b_k a_n) v_n$$

$(w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n)$ è una base di V, quindi

$$b_1 + b_k a_1 = \dots = b_{k-1} + \cancel{b_k a_{k-1}} = 0$$

$$b_k a_k = 0 \quad \Rightarrow b_k = 0 \Rightarrow b_1 = \dots = b_n = 0$$

$$b_{k+1} + \cancel{b_k a_{k+1}} = 0$$

$$b_n + \cancel{b_k a_n} = 0$$

Quindi il completamento è provato $\square$