Nome: **Matricola:**

Algebra Lineare

Settimo appello 18/09/2018

Esercizio 1.
Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che $A^2 - 4A + 3I = 0$.

1. Dimostrare che A ha solo gli autovalori 3 e 1
2. Dimostrare che A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.

a) Sia A una qualsiasi matrice invertibile $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Dire se i seguenti insiemi sono o no sottospazi vettoriali:

$$V_1 = \{X \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \ t, c, \ \ A^{-1}XA = I\,\} \ ;$$

$$V_2 = \{X \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \ t.c. \ A^{-1}XA = X\,\} \ ;$$

$$V_3 = \{X \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \ t.c. \ A^{-1}XA \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})\,\} \ ;$$

b) Per $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trovare una base di V_2 .

Esercizio 3.
Sia

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & -1 & \alpha^2+1 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice M_α è diagonalizzabile.
b) Trovare una base di autovettori per $\alpha = 0$.
c) Per $\alpha = -1$ trovare una base rispetto alla quale M_{-1} abbia forma triangolare.

Esercizio 4.

a)Costruire $f \ : \ M(2\times 2, \mathbb{R}) \longrightarrow M(2\times 2, \mathbb{R})$ lineare tale che $\dim \, Ker\, f = 2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) La f costruita è diagonalizzabile ?