# Lezione 18.11.2021



Sappiamo che la base (canonica!) dello spazio delle matrici $M(p,q,\mathbb{R})$ è data da

$$\mathcal{B} = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$$

dove $E_{ij}$ è la matrice che ha 1 al posto $ij$ e 0 altrove.
Queste $p\cdot q$ matrici sono indipendenti e generano $M(p,q,\mathbb{R})$. Infatti se $A = (a_{ij})$ si ha

$$A = \sum_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots q}} a_{ij} E_{ij}$$

e questa combinazione lineare dà la matrice nulla $\iff a_{ij} = 0 \ \forall i \ \forall j$, cioè $A = 0$.

Inoltre $E_{ij} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ e verifica $E_{ij}(e_k) = 0$ se $k \neq j$ mentre $E_{ij}(e_j) = e_i \in \mathbb{R}^p$

Forse questo ci dà un'idea per calcolare $\dim \mathcal{L}(V,W)$

<u>Osservazione</u> Chiamiamo <u>isomorfismo</u> ogni applicazione lineare che sia iniettiva e surgettiva.

Se $T : V \to W$ è isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$
Inoltre se $T$ è isomorfismo, $T$ ha una inversa $S$ lineare.

infatti sia $S$ l'inverso di $T$ (c'è perché $T$ è lineare)

dobbiamo provare $S(w_1+w_2) = S(w_1) + S(w_2)$ e

$S(aw) = a\,S(w)$

Poiché $T$ è suriettiva esistono $v_1$ e $v_2$ tali che $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Per cui $S(w_1) = v_1$, $S(w_2) = v_2$

Poiché $T$ è iniettiva $v_1$ e $v_2$ sono unici

Ora $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$

Quindi $S(w_1+w_2) = v_1+v_2 = S(w_1) + S(w_2)$

Inoltre se $w = T(v)$ (e $v$ è univocamente determinato) si ha $T(av) = aT(v) = aw$

Quindi $S(aw) = av = a\,S(w)$ $\square$

Teorema Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. Ogni base $\mathcal{B}$ di $V$ determina un isomorfismo

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

prova: sia $\mathcal{B} = (v_1 - v_n)$ una base di $V$

se $v \in V$ allora $v = x_1v_1 + - + x_nv_n$ e noi definiamo

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

1) $F_{\mathcal{B}}$ è lineare: se $v = x_1v_1 + \quad + x_nv_n$ e

$v' = x_1'v_1 + \quad + x_n'v_n$.

Allora $v+v' = (x_1+x_1')v_1 + \dots + (x_n+x_n')v_n$

quindi $F_{\mathcal{B}}(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(v) + F_{\mathcal{B}}(v')$

Inoltre $av = ax_1v_1 + \dots + ax_nv_n$

Quindi $F_{\mathcal{B}}(av) = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = aF_{\mathcal{B}}(v)$

$F_{\mathcal{B}}$ è iniettiva: se $F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ vuol dire $v = 0v_1 + \dots + 0v_n = 0$

$F_{\mathcal{B}}$ è surgettiva: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(a_1v_1 + \dots + a_nv_n)$

Morale: $F_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo (che dipende dalla base scelta: basi diverse danno diversi isomorfismi

Come cambia l'isomorfismo?

Prendiamo 2 basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$

Allora se $v \in V$ $\quad v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n =$

$= y_1w_1 + \dots + y_nw_n$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{B}}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "M"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$F_{\mathcal{B}} \circ F_{\mathcal{B}'}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una matrice $M$

Calcoliamo $M$

$M^j = M(e_j) = F_{\mathcal{B}}(F_{\mathcal{B}'}^{-1}(e_j)) = F_{\mathcal{B}}(w_j) =$ coordinate di $w_j$ nella base $\mathcal{B}$. $\quad M = (F_{\mathcal{B}}(w_1) \dots F_{\mathcal{B}}(w_n))$

Quindi per costruzione

$$M\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}\left(F_{\mathcal{B}'}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}\right) = F_{\mathcal{B}}(y_1 w_1 + \cdot + y_n w_n) =$$

$$= F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Quindi $M$ porta le coordinate di $v$ nella base $\mathcal{B}'$ nelle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

Naturalmente $M$ è invertibile e $M^{-1} = F_{\mathcal{B}'} \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}$ fa il contrario, cioè porta le coordinate di $v$ nella base $\mathcal{B}$ nelle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$

In che cosa ci è utile questo isomorfismo $F_{\mathcal{B}}$.

Esempio: Prendiamo $\mathbb{R}_3[t] = \{$polinomi di grado $\leq 3\}$

Consideriamo i polinomi

$p_1(t) = t^2 - t$ $\qquad q_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

$p_2(t) = 1 + t^2$ $\qquad q_2(t) = 1 - t + t^2 - t^3$

$p_3(t) = -1 - t$

e sia $V = \operatorname{span}(p_1, p_2, p_3)$ $\quad W = \operatorname{span}(q_1, q_2)$

Vogliamo calcolare $\dim V$, $\dim W$, $\dim V + W$, $\dim V \cap W$.

Usiamo $F_{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$

Scriviamo come colonne di una matrice

$F_{\mathcal{B}}(p_1), F_{\mathcal{B}}(p_2), F_{\mathcal{B}}(p_3)$, $F_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $F_{\mathcal{B}}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $F_{\mathcal{B}}(p_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim U = rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

perché le 3 colonne generano $F_{\mathcal{B}}(U)$

Si vede che la $3^e$ colonna è la prima - la seconda
Quindi di $U = rk(\text{matrice}) = 2$

Poiché $q_1$ e $q_2$ sono indipendenti $\dim W = 2$
Ora scriviamo la matrice che ha come colonne

$F_{\mathcal{B}}(p_1), F_{\mathcal{B}}(p_2)$ ($F_{\mathcal{B}}$ della base di $U$), $F_{\mathcal{B}}(q_1), F_{\mathcal{B}}(q_2)$

$rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \dim(U+W)$ e lo possiamo calcolare con Gauss. Dal teo di Grassmann troviamo anche $\dim U \cap W$.
Tutto si riduce a calcolare rank.

Ora possiamo a vedere che succede con questi isomorfismi quando abbiamo

$T: V \to W$ lineare

Prendiamo una base di $V$ $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ e una base di $W$ $\mathcal{C}=(w_1,\dots,w_m)$. Allora

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_\mathcal{B}"'] & W \arrow[d, "F_\mathcal{C}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$F_\mathcal{C}\circ T\circ F_\mathcal{B}^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è la matrice $A\in M(m,n)$

$A$ è la "matrice associata" a $T$ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$

Come è fatta $A$?

$$A(e_j)=F_\mathcal{C}\left(T\left(F_\mathcal{B}^{-1}e_j\right)\right)=F_\mathcal{C}\left(T(v_j)\right)$$ = coordinate di $T(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ di $W$

$$A\quad\left(F_\mathcal{C}(T(v_1))\ \dots\ F_\mathcal{C}(T(v_n))\right)$$

Esempio: $\mathbb{R}_3[t]\xrightarrow{T}\mathbb{R}_3[t]$ dove $T(p(t))=(t+1)p'$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_3[t] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_\mathcal{B}"'] & \mathbb{R}_3[t] \arrow[d, "F_\mathcal{B}"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

Calcoliamo $A$: Le colonne di $A$ sono

$$F_\mathcal{B}(T(1))\quad F_\mathcal{B}(T(t))\quad F_\mathcal{B}(T(t^2))\quad F_\mathcal{B}(T(t^3))$$

$T(1)=(t+1)\cdot 0=0$, $T(t)=t+1$, $T(t^2)=(t+1)2t$

$T(t^3)=(t+1)3t^2$. Quindi $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&2&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

Questa costruzione della matrice associata a T rispetto alle basi date, ci dà un'applicazione

$$\mathcal{L}(V,W) \xrightarrow{F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}} M(s,n,\mathbb{R}) \qquad F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(T) = \text{matrice associata}$$

dove $s = \dim W$, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ base di $V$, $\mathcal{C}$ base di $W$.

Teorema Per ogni scelta di basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$

$F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è un isomorfismo lineare

prova: $F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è lineare: Se $S, T: V \to W$

le coordinate nella base $\mathcal{C}$ di $(S+T)(v_i)$ $v_i \in \mathcal{B}$ sono la somma delle coordinate di $S(v_i)$ e di $T(v_i)$. Quindi la matrice associata a $T+S$ (che ha per colonne $F_{\mathcal{C}}((T+S)(v_i))$) è la somma

di quella associata a T e di quella associata a S. Inoltre le coordinate nella base $\mathcal{C}$

di $(aT)(v_i)$

sono le coordinate di $T(v_i)$ moltiplicate per $a$ quindi la matrice associata ad $aT$ è $a$ volte la matrice associata a T

$F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è iniettiva. Infatti se $T \in \ker F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ la sua matrice associata è 0, ma allora $T(v_i)$ ha coordinate tutte nulle nella base $\mathcal{C}$
$\Rightarrow T(v_1) = \quad = T(v_n) = 0$ e $T = 0$

$F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è surgettiva. Se $A \in M(s,n,\mathbb{R})$

si ha

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s \\ V \arrow[u, "F_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "T"] & W \arrow[u, "F_{\mathcal{C}}"'] \end{tikzcd}$$

$T = F_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ F_{\mathcal{B}} : V \to W$ è lineare e la sua matrice associata è $A$.

Dunque $\mathcal{L}(V,W)$ è isomorfo a $M(s,n)$ e quindi

$\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim M(s,n) = n \cdot s = \dim V \cdot \dim W$.

Ci restano da vedere 2 cose

1) Come cambia $A$ se si cambiano le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$

2) Nel caso $V = W$, c'è una sola base $\mathcal{B}$. Come cambia $A$ al variare di $\mathcal{B}$

1ª cosa

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "T"] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F_{\mathcal{C}'}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] \arrow[rrr, bend right, "A'"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s & \mathbb{R}^s \arrow[l, "N"'] \end{tikzcd}$$

$M$ ed $N$ sono invertibili, come abbiamo visto

quindi $A' = N^{-1} A M$

Questo ci dà una relazione di equivalenza in $M(s,n,\mathbb{R})$, cioè una relazione

riflessiva $A \sim A$ perché $A = I_s^{-1} A I_n = I_s A I_n = A$

simmetrica $A \sim A$ se $A' = N^{-1} A M$, ma allora

$A = N A' M^{-1}$ $N$ è l'inverso di $N^{-1}$ e $M^{-1}$ è invertibile

transitiva $A \sim A'$ $A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$

$A' = N^{-1} A M$ $A'' = N_1^{-1} A' M_1$

sostituiamo $A'$ nell'espressione di $A''$

$$A'' = N_1^{-1} N^{-1} A M M_1$$

$M M_1$ è invertibile perché lo sono $M$ ed $M_1$

$$N_1^{-1} N^{-1} = (N N_1)^{-1}$$

Troveremo che $A \sim A' \Leftrightarrow A$ e $A'$ hanno lo stesso rango.

Invece se $V = W$ la relazione diventa

$$A \approx A' \text{ se } A' = M^{-1} A M .$$

È ancora un'equivalenza in $M(n,n,\mathbb{R})$ che si chiama SIMILITUDINE, ma è più complicata da studiare.