

Lezione 18. 11. 2021

(1)

Scopriamo che la base (canonica!) dello spazio delle matrici $M(p, q, \mathbb{R})$ è data da

$$\mathcal{B} = \{ \bar{E}_{ij} \}_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}}$$

dove \bar{E}_{ij} è la matrice che ha 1 al posto ij e 0 altrove

Queste $p \cdot q$ matrici sono indipendenti e generano $M(p, q, \mathbb{R})$. Infatti se $A = (a_{ij})$ si ha

$$A = \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}} a_{ij} \bar{E}_{ij}$$

e questa combinazione lineare dà la matrice nulla $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \forall i \forall j$, cioè $A = 0$.

Inoltre $\bar{E}_{ij}: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ e verifica $\bar{E}_{ij}(e_k) = 0$ se

$k \neq j$ mentre $\bar{E}_{ij}(e_j) = e_i \in \mathbb{R}^p$

Forse questo ci dà un'idea per calcolare $\dim(V, W)$

Dimensione Chiusura isomorfismo ogni applicazione lineare che sia iniettiva e suriettiva.

Se $T: V \rightarrow W$ è isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$

Inoltre se T è isomorfismo, T ha una inversa S lineare.

(2)

infatti sia S l'inverso di T (c'è perché T è lineare)

allora per la $S(w_1 + w_2) = S(w_1) + S(w_2)$ e

$$S(\alpha w) = \alpha S(w)$$

Poiché T è suriettiva esistono v_1 e v_2 tali che

$T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Per cui $S(w_1) = v_1$, $S(w_2) = v_2$

Poiché T è iniettiva v_1 e v_2 sono unici

$$\text{Ora } T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

$$\text{Quindi } S(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = S(w_1) + S(w_2)$$

Inoltre se $w = T(v)$ (e v è unicamente determinato) si ha $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha w$

$$\text{Quindi } S(\alpha w) = \alpha v = \alpha S(w) \quad \square$$

Teorema Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n
Ogni base \mathcal{B} di V determina un isomorfismo

$$F_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ma: sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V
se $v \in V$ allora $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ e noi definiremo

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

1) $F_{\mathcal{B}}$ è lineare: se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ e
 $v' = x'_1 v_1 + \dots + x'_n v_n$

$$\text{Allora } v + v' = (x_1 + x'_1) v_1 + \dots + (x_n + x'_n) v_n$$

quindi $F_{\mathcal{B}}(v + v') = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(v) + F_{\mathcal{B}}(v')$

3

Inoltre $av = ax_1v_1 + \dots + ax_nv_n$

quindi $F_B(av) = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a F_B(v)$

F_B è iniettiva: se $F_B(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ vuol dire $v = 0v_1 + \dots + 0v_n = 0$

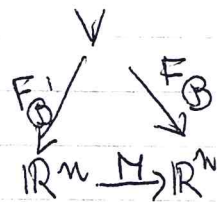
F_B è surgettiva: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = F_B(a_1v_1 + \dots + a_nv_n)$

Maiale: F_B è un isomorfismo (che dipende dalla loro scelta: basi diverse danno diversi isomorfismi)

Come cambia l'isomorfismo?

Prendiamo 2 basi $B = (v_1, \dots, v_n)$, $B' = (w_1, \dots, w_n)$

Allora se $v \in V$ $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n = y_1w_1 + \dots + y_nw_n$



$F_B \circ F_{B'}^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una matrice M

calcoliamo M

$M^j = M(e_j) = F_B(F_{B'}^{-1}(e_j)) = F_B(w_j) =$ coordinate di w_j nelle basi B . $M = \left(F_B(w_1) \dots F_B(w_n) \right)$

Quindi per costruzione

(4)

$$M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}} \left(F_{\mathcal{B}'}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) = F_{\mathcal{B}} (y_1 w_1 + \dots + y_m w_m) = \\ = F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Quindi M porta le coordinate di v nelle base \mathcal{B}' nelle sue coordinate rispetto a \mathcal{B} .

Naturalmente M è invertibile e $M^{-1} = F_{\mathcal{B}'} \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}$ fa il contrario, cioè porta le coordinate di v nelle base \mathcal{B} nelle sue coordinate rispetto a \mathcal{B}' .

In che cosa ci è utile questo isomorfismo $F_{\mathcal{B}}$?

Esempio: Prendiamo $\mathbb{R}_3[t] = \{\text{polinomi di grado } \leq 3\}$

Consideriamo i polinomi

$$p_1(t) = t^2 - t$$

$$p_2(t) = 1 + t^2$$

$$p_3(t) = -1 - t$$

$$q_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3$$

$$q_2(t) = 1 - t + t^2 - t^3$$

e sia $U = \text{span}(p_1, p_2, p_3)$ $W = \text{span}(q_1, q_2)$

Vogliamo calcolare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U+W$, $\dim U \cap W$.

Uniamo $F_{\mathcal{B}}$.

$$B = (1, t, t^2, t^3)$$

Scriviamo come colonne di una matrice

$$F_B(p_1), F_B(p_2), F_B(p_3), \quad F_B(p_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_B(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_B(p_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim U = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

perché le 3 colonne generano $F_B(U)$

Si vede che la 3^a colonna è la prima - la seconda
quindi $\dim U = \text{rk}(\text{matrice}) = 2$

Poiché q_1 e q_2 sono indipendenti $\dim W = 2$
Ora scriviamo la matrice che ha come colonne

$$F_B(p_1), F_B(p_2) \text{ (} F_B \text{ della base di } U \text{)}, F_B(q_1), F_B(q_2)$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \dim(U+W) \text{ e lo possiamo calcolare con Gauss. Dal teo di Grassman tro-}$$

riamo anche $\dim U \cap W$.

Tutto si riduce a calcolare rank.

Ora possiamo e vedere che succede con questi isomorfismi quando applico

$$T: V \rightarrow W \text{ lineare}$$

②

Prendiamo una base di V $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e una base di W $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_p)$. Allora

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{T} & W \\
 \downarrow F_{\mathcal{B}} & & \downarrow F_{\mathcal{C}} \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^p
 \end{array}$$

$F_{\mathcal{C}} \circ T \circ F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è la

matrice $A \in \mathbb{R}^{(p, n)}$

A è la "matrice associata" a T nelle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} .
Come è fatta A ?

$$A(e_j) = F_{\mathcal{C}} \left(T \left(F_{\mathcal{B}}^{-1} e_j \right) \right) = F_{\mathcal{C}} \left(T(v_j) \right) = \text{coordinate di } T(v_j) \text{ rispetto alle basi } \mathcal{C} \text{ di } W$$

$$A \left(F_{\mathcal{C}}(T(v_1)) \quad \dots \quad F_{\mathcal{C}}(T(v_n)) \right)$$

Esempio: $\mathbb{R}_3[t] \xrightarrow{T} \mathbb{R}_3[t]$ dove $T(p(t)) = (t+1)p'$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_3[t] & & \mathbb{R}_3[t] \\
 \downarrow F_{\mathcal{B}} & & \downarrow F_{\mathcal{B}} \\
 \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^4
 \end{array}$$

Calcoliamo A : Le colonne di A sono

$$F_{\mathcal{B}}(T(1)) \quad F_{\mathcal{B}}(T(t)) \quad F_{\mathcal{B}}(T(t^2)) \quad F_{\mathcal{B}}(T(t^3))$$

$$T(1) = (t+1) \cdot 0 = 0, \quad T(t) = t+1, \quad T(t^2) = (t+1)2t$$

$$T(t^3) = (t+1)3t^2. \quad \text{Quindi } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7

Questa costruzione della matrice associata a T rispetto alle basi date, ci dà un'applicazione

$$L(V, W) \xrightarrow{F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}} M(s, n, \mathbb{R}) \quad F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(T) = \text{matrice associata}$$

dove $s = \dim W$, $n = \dim V$, \mathcal{B} base di V , \mathcal{C} base di W .

Teorema Per ogni scelta di basi \mathcal{B} e \mathcal{C}

$F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è un isomorfismo lineare

prova: $F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è lineare: Se $S, T: V \rightarrow W$

le coordinate nella base \mathcal{C} di $(S+T)(v_i)$ $v_i \in \mathcal{B}$ sono la somma delle coordinate di $S(v_i)$ e di $T(v_i)$. Quindi la matrice associata a $T+S$ (che ha per colonne $F_{\mathcal{C}}((T+S)(v_i))$) è la somma

di quelle associate a T e di quelle associate a S . Inoltre le coordinate nella base \mathcal{C}

di $(\alpha T)(v_i)$

sono le coordinate di $T(v_i)$ moltiplicate per α quindi la matrice associata ad αT è α volte la matrice associata a T

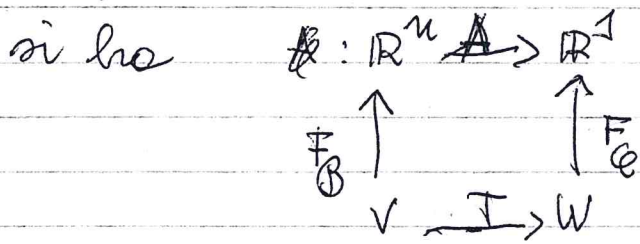
$F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ è iniettivo. Infatti se $T \in \text{Ker } F_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

la sua matrice associata è 0 , ma allora

$T(v_i)$ ha coordinate tutte nulle nella base \mathcal{C}

$\Rightarrow T(v_1) = \dots = T(v_n) = 0$ e $T = 0$

$F_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ è invertibile. Se $A \in M(1, n, \mathbb{R})$ (2)



$T = F_{\mathcal{B}}^{-1} \circ A \circ F_{\mathcal{B}} : V \rightarrow W$ è lineare e la sua matrice associata è A .

Dunque $\mathcal{L}(V, W)$ è isomorfo a $M(1, n)$ e quindi

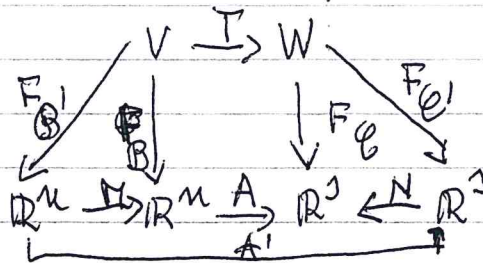
$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M(1, n) = n \cdot 1 = \dim V \cdot \dim W$$

Ci restano da vedere 2 cose

1) Come cambia A se si cambiano le basi \mathcal{B} e \mathcal{B}'

2) Nel caso $V = W$, c'è una sola base \mathcal{B} .
Come cambia A al variare di \mathcal{B}

1^a cosa



M ed N sono invertibili, come abbiamo visto
quindi $A' = N^{-1} A M$

questo ci dà una relazione di equivalenza ⁽⁹⁾
in $M(n, n, \mathbb{R})$, cioè una relazione

riflessiva $A \sim A$ perché $A = \mathbb{I}_1^{-1} A \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_1 A \mathbb{I}_n^{-1} = A$

simmetrica $A \sim A'$ se $A' = N^{-1} A M$, ma allora

$$A = N A' M^{-1} \quad N \text{ è l'inverso di } N^{-1} \\ \text{e } M^{-1} \text{ è invertibile}$$

transitiva $A \sim A' \quad A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$

$A' = N^{-1} A M \quad A'' = N_1^{-1} A' M_1$
sostituiamo A' nell'espressione di A''

$$A'' = N_1^{-1} N^{-1} A M M_1$$

$M M_1$ è invertibile perché lo sono M ed M_1 ,

$$N_1^{-1} N^{-1} = (N N_1)^{-1}$$

Troviamo che $A \sim A' \Leftrightarrow A$ e A' hanno lo stesso rango.

Invece se $V = W$ la relazione diventa

$$A \sim A' \text{ se } A' = M^{-1} A M.$$

È ancora un'equivalenza in $M(n, n, \mathbb{R})$ che si chiama SIMILIFUDINE, ma è più complicata da studiare.