Lezione 3.12.2020

Abbiamo visto che per l'equivalenza

$$B \sim A \iff B = N^{-1}AM$$

ogni classe di equivalenza contiene una "forma canonica" del tipo $\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che caratterizza in $M(p,q)$ la classe delle matrici di rango 2.

Così non è per le classi di similitudine di $M(n,n)$. Sappiamo che al variare delle basi di uno spazio vettoriale V ed ogni applicazione lineare $T: V \to V$ si può associare la classe di similitudine delle sue matrici associate.

Cominciamo con 2 definizioni.

Sia $T: V \to V$ lineare, ossia T è un endomorfismo di V

Definizione: 1) $v \in V$, $v \neq 0$ è un AUTOVETTORE di T se $T(v) = a v$ $a \in \mathbb{R}$.

2) $a \in \mathbb{R}$ è autovalore di T se $\exists\, v \neq 0$ in V tale che $T(v) = a v$

3) se a è autovalore di T

$V_a = \ker(T - a\,Id)$ è l'autospazio relativo all'autovalore a.

Notate che se a è autovalore di T allora ②
c'è $v \neq 0$ tale che $T(v) - av = 0$ e quindi
$\dim V_a \geqslant 1$. $\quad I_d : V \to V$ è ~~la un~~ l'identità
$I_d(v) = v \ \forall v \in V$.

Esempio $V = \mathbb{R}^3$ e T è la rotazione di
un angolo π attorno all'asse x. T è una
matrice 3×3 le cui colonne sono le immagini
di e_1, e_2, e_3 quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e_1 è autovettore di 1
e_2, e_3 sono autovettori di 2

Ce ne sono altri? Scriviamo

$T(v) = av \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Quindi
$$\begin{aligned} x &= ax \\ -y &= ay \\ -z &= az \end{aligned} \qquad \begin{cases} (1-a)x = 0 \\ (1+a)y = 0 \\ (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che: se $a \neq 1, -1$ c'è solo la
soluzione nulla, quindi a non è autovalore
se $a = 1$ le soluzioni sono $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
cioè $V_1 = \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} = $ asse x

Se $a=1$ il sistema si riduce a $x=0$

quindi $V_{-1} = \{x=0\}$ = piano delle y e delle z

le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Se invece T fosse stata una rotazione di $\pi/2$ sarebbe stata

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo gli autovalori

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - ax = 0 \\ -ay + z = 0 \\ -y - az = 0 \end{cases}$$

ovvio $\begin{cases} (1-a)x = 0 \\ -ay + z = 0 \\ y + az = 0 \end{cases}$ Se $a \neq 1$ il sistema ci dice

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -az \\ z + a^2 z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -az \\ (a^2+1)z = 0 \end{cases}$$

e dato che $a^2+1 \neq 0$ l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi $a \neq 1$ non è autovalore.

Se $a=1$ le soluzioni sono $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dim $V_1 = 1$

sarebbe buono se V avesse una base formata da autovettori. Rispetto ad una tale base la matrice associata sarebbe diagonale

Infatti $T(v_1) = a_1 v_1$, $T(v_2) = a_2 v_2$, - - , $T(v_n) = a_n v_n$

quindi $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$. e nella classe

di similitudine delle matrici associate a T ce ne sarebbe una diagonale.

<u>Definizione</u> 1. un endomorfismo $T : V \to V$ è diagonalizzabile se $\exists$ una base di V formata da autovettori

2. Una matrice $A \in M(n,n)$ è diagonalizzabile se nella sua classe di similitudine c'è una matrice diagonale.

3. Un endomorfismo T è triangolabile se V possiede una base $(v_1 - v_n)$ tale che la matrice associata è triangolare superiore

4. $A \in M(n,n)$ è triangolabile se A è simile ad una matrice triangolare superiore.

~~mat~~

Dire che $(v_1 - v_n)$ è una base che rende T

Triangolabile vuol dire:

v_1 è autovettore, $T(v_2) \in \text{span}(v_1, v_2)$

e $\forall i = 1, \dots, n$ $T(v_i) \in \text{span}(v_1, \dots, v_i)$.

Esempio Sia $p(t)$ un polinomio di 2° grado con 2 radici reali distinte

$$p(t) = (t-a)(t-b)$$

Avete visto a esercitazione che se $A \in M(n,n)$ verifica $p(A) = (A - aI_n)(A - bI_n) = 0$

allora $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A - aI_n) \oplus \text{Ker}(A - bI_n)$

Quindi: gli autovalori di A sono a e b

gli autospazi sono $V_a = \text{Ker}(A - aI_n)$

$V_b = \text{Ker}(A - bI_n)$

La somma degli autospazi è diretta e dà tutto $\mathbb{R}^n$. Quindi $\mathbb{R}^n$ ha una base di autovettori di A e A è diagonalizzabile.

Pensate al caso $p(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$ e cercate di provare che se $p(A) = 0$, allora A è diagonalizzabile.

Come si calcolano gli autovalori di $T: V \to V$?
per prima cosa scegliamo una base e chiamiamo A la matrice associata a T.
Se $a \in \mathbb{R}$ è autovalore di T, $\exists v \in V$ $v \neq 0$
tale che $T(v) - av = 0$, quindi $\operatorname{Ker}(T - aI_d)$ ha
dimensione ≥ 1 e quindi $T - aI_d$ non è invertibile. Nella base scelta la matrice associata a $T - aI_d$ è $A - aI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-a & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{nn}-a \end{pmatrix}$
e anche $A - aI_n$ non è invertibile.

Quindi a è autovalore di $T \Longleftrightarrow A - aI_n$ non è invertibile e cioè $\det(A - aI_n) = 0$.
Ma allora consideriamo

$$\det(A - tI_n) = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

1. questo è un polinomio in t di grado n
2. le radici di questo polinomio sono gli autovalori di T.

<u>prova</u>) per induzione su n

se $n = 1$ ~~det~~ $A = (a_{11})$

$\det A - tI_1 = (a_{11} - t)$ è un polinomio di grado 1

supponiamo vero per $n-1$ e proviamo per n

Sviluppiamo $\det(A - tI_n)$ per la prima colonna.

$$\det(A - tI_n) = (a_{11} - t)\det(A - tI_n)_{11} - a_{21}\det(A - tI_n)_{21} + \cdots + \cancel{(-1)^{1+n}} (-1)^{n+1}\det(A - tI_n)_{n1}$$

$\det(A - tI_n)_{11}$ è un polinomio in t di grado $n-1$ per ipotesi induttiva

$(A - tI_n)_{i1}$ per $i > 1$ ~~non~~ contiene non più di $(n-2)$ termini che contengono t. quindi il suo determinante ha grado di ciascuno $n-2$ in t

da cui la tesi perché per ipotesi induttiva il primo termine ha grado n.

2. È chiaro: se $\det(A - aI_n) = 0$ e è auto- (8)
valore perché $\ker(A - aI_n) \neq \{0\}$. Quindi
a è radice del polinomio $\det(A - tI_n)$

<u>Osservazione</u> Il polinomio $\det(A - tI_n)$ dipende solo dalla classe di similitudine di A ovvero se B è simile a A $\det(B - tI_n) = \det(A - tI_n)$. Infatti $B = M^{-1}AM$, quindi

$$\det(B - tI_n) = \det(M^{-1}AM - tM^{-1}M) =$$
$$= \det\left[M^{-1}(A - tI)M\right] = \det M^{-1} \det(A - tI) \det M$$
$$= \det(A - tI_n) \quad \text{perché } \det M^{-1} \cdot \det M = \det I = 1$$

Abbiamo usato più volte Binet.
Quindi possiamo chiamare questo polinomio POLINOMIO CARATTERISTICO di T e notarlo $P_T(t)$.

Ora per ogni radice λ di $P_T(t)$ sono definite due numeri:
molteplicità algebrica di λ $\quad m_a(\lambda)$
" $\quad$ geometrica di λ $\quad m_g(\lambda)$

$m_a(\lambda)$ è la sua molteplicità come radice di $p_T(t)$. Una radice ha molteplicità m se $p_T(t) = (t-\lambda)^m q(t)$ dove $q(\lambda) \neq 0$.

$m_g(\lambda) = \dim \ker(T - \lambda I_d)$, dimensione di V_λ. Notate che $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Infatti se λ è autovalore $\dim V_\lambda \geq 1$. Se poi $v_1, \dots, v_{m_g(\lambda)}$ è una base di V_λ e la completate a base di V, la matrice associata viene

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_{m_g(\lambda)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

quindi $\det(A - tI_n) = = (\lambda - t)^{m_g(\lambda)} \det(C - tI)$ e nessuno ci dice che il secondo fattore non abbia la radice λ.

<u>Lemma</u> Se T è triangolabile tutti i suoi autovalori sono reali, cioè $p_T(t)$ ha solo radici reali.

prova Per ipotesi c'è una base di V rispetto a cui la matrice associata A è triangolare superiore

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$ quindi $p_T(t) = \det(A - tI_n) =$

$$= (a_1 - t)(a_2 - t) \dots (a_n - t)$$

~~Corollario presa una matrice associat~~

Corollario reali o complessi che siano gli autovalori di $p_T(t)$ si ha

$$p_T(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A\, t^{n-1} + \dots + \det A$$

prova se $\lambda_1 - \lambda_n$ sono le n-radici (reali e complesse di $p_T(t)$ si ha

$$p_T(t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

e il conto è presto fatto.

Il termine noto è il prodotto degli autovalori e la traccia è la somma degli autovalori.

Diamo 2 criteri perché un endomorfismo $T: V \to V$ sia diagonalizzabile. Prima ci serve questo.

Proposizione $T: V \to V$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti, $v_1, \dots, v_k$ relativi autovettori. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti.

<u>prova</u> per induzione su k. Per $k=1$, un solo autovettore $v_1 \neq 0$ quindi indipendente.
supponiamo $v_1, \dots, v_{k-1}$ indipendenti e proviamo che $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti. Supponiamo

$$a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} + a_k v_k = 0$$ Trasformiamo con

T: $0 = T(a_1 v_1 + \quad + a_k v_k) = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_k \lambda_k v_k$

Dalla prima relazione ricaviamo

$a_k v_k = -(a_1 v_1 + \dots + a_{k-1} v_{k-1})$. Sostituiamo nella seconda relazione

$$0 = a_1 \lambda_1 v_1 + \quad + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} - \lambda_k (a_1 v_1 + \quad + a_{k-1} v_{k-1}) =$$

$$= a_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + a_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1}$$

Questa è una relazione di dipendenza lineare tra i vettori $v_1 - v_{k-1}$ che sono indipendenti per ipotesi induttiva. Ne consegue che i coefficienti devono essere tutti nulli

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)=0 \quad \dots \quad a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)=0$$

e dato che $\lambda_i-\lambda_k \neq 0$ per $i \neq k$ si deve avere $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$. La prima relazione diventa $a_k v_k = 0$ e quindi anche $a_k = 0$ perché $v_k \neq 0$.

<u>Corollario</u> Se T ha n autovalori distinti, T è diagonalizzabile. Basta prendere n relativi autovettori. Sono indipendenti e quindi una base di V, perché $\dim V = n$.

Arriviamo al primo criterio

<u>Teorema</u> $T: V \to V$ endomorfismo, $\dim V = n$
$\lambda_1 - \lambda_k$ autovalori distinti di T (tutti quelli che ci sono). $m_a(\lambda_j) = m_j$ $m_g(\lambda_j) = n_j$. Sono fatti equivalenti:

1) T è diagonalizzabile

2) Ogni elemento $v \in V$ è somma di auto- (13)
vettori.

3) $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

4) Tutti gli autovalori di T sono reali e $m_j = n_j$ per $j = 1, \dots, k$.

5) $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n = \dim V$

prova $1 \Rightarrow 2$ Se V ha una base $v_1, \dots, v_n$ di autovettore ogni $v \in V$ è loro combinazione lineare $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

ma $x_j v_j$ è autovettore relativo a λ_j se non è nullo perchè $T(x_j v_j) = x_j T(v_j) = x_j \lambda_j v_j = \lambda_j (x_j v_j)$

$2 \Rightarrow 3$ Se $V_{\lambda_1} \oplus \quad \oplus V_{\lambda_k}$ non fosse V, ci sarebbe un vettore $v \neq 0$ ~~ed~~ fuori della somma e v non sarebbe somma di autovettori, visto che tutti gli autovettori sono in $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.

$3 \Rightarrow 4$. Scegliamo una base $\mathcal{B}_1$ di $V_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_k$ di V_{λ_k} $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è una base di V e la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{m_2} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}$$

per cui $p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} (\lambda_2 - t)^{n_2} \cdots (\lambda_k - t)^{n_k}$

da cui: le radici sono tutte reali e $n_j = m_j$

$4 \Rightarrow 5$. Se le radici di $p_T(t)$ sono tutte reali

$m_1 + \cdots + m_k = n$, ma $m_j = n_j$ per cui

$n_1 + \cdots + n_k = n$.

$5 \Rightarrow 1$ Se $n_1 + \cdots + n_k = n$ $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$

e questo implica che V ha una base di autovettori.

Il criterio di diagonalizzabilità è il numero 4.

Abbiamo anche un criterio di triangolabilità che vedremo prossimamente

<u>Teorema</u> T è triangolabile $\Leftrightarrow$ p_T ha solo radici reali