Lezione del 1.12.2022

Determinante di una matrice quadrata.

Sarà una funzione $\det : M(n,n) \to \mathbb{R}$ che ci dirà se una matrice è invertibile.

Cominciamo con $n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

e dimostriamo:

$$A \text{ ha rango } < 2 \iff \det A = 0$$

(quindi A è invertibile $\iff \det A \neq 0$)

prova: se le righe di A sono dipendenti, una è multipla dell'altra $R_1 = \alpha R_2 \Rightarrow \alpha a_{21}a_{22} - \alpha a_{22}a_{21} = 0$

Supponiamo ora $\det A = 0$, cioè $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$. Se uno dei membri è 0 anche l'altro lo è, quindi A ha una riga o una colonna di zeri $\Rightarrow$ non è invertibile.

Se $a_{11}a_{22} \neq 0 \neq a_{12}a_{21}$ allora $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \alpha$ e dunque $R_1 = \alpha R_2$.

Porre $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ fa ciò che volevamo.

Ora diamo 3 proprietà, verificate per $n=2$, desiderabili per la nostra d.

- (A) Se A ha 2 righe uguali $d(A) = 0$
- d è lineare su ogni riga, cioè per $i = 1, \dots, n$

  (C) se $A_i = A_i' + A_i''$ $\quad d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i' \\ A_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i'' \\ A_n \end{pmatrix}$

  (B) se $A_i = \alpha A_i'$ $\quad d\begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha A_i' \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha\, d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i' \\ A_n \end{pmatrix}$

- $d(I_n) = 1$

Esercizio verificare per $n=2$ che $d(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ verifica le 3 proprietà

<u>Proposizione</u> Se d verifica le prime 2 proprietà, allora

1) Se A ha una riga nulla $d(A)=0$

2) $d(\ldots, A_i+\lambda A_j \ldots) = d(\ldots A_i \ldots)$

3) se si scambiano 2 righe d cambia segno.

4) quindi se S è una scala di A, $d(S)=\pm d(A)$
+ se gli scambi di riga sono un numero pari, − se sono un numero dispari.

5) Se le righe di A sono dipendenti $d(A)=0$

prova: 1) Se $A_i = (0 - 0) = 0\,(1, -, 1)$ per linearità

$$d(A) = 0 \cdot d\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = 0.$$

2) Per linearità:

$$d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i+\lambda A_j \\ A_n \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} + \lambda\, \cancel{d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix}} = d(A)$$

3) Scriviamo la matrice $B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i+A_j \\ A_j+A_i \\ A_n \end{pmatrix}$

$$0 = d(B) = d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_j+A_i \\ A_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_j+A_i \\ A_n \end{pmatrix} =$$

$$d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix} + \cancel{d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix}} + \cancel{d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix}} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} = 0$$

quindi lo scambio cambia il segno.

4) è conseguenza di 2 e di 3

5) Se le righe di A sono dipendenti S ha una riga nulla. Per 1 $d(A)=0$. ③

Queste proprietà bastano per calcolare $d(D)$ su una matrice diagonale $D=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ $d(D)=a_1 d\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = \cdots$

$= a_1 \cdots a_n d(I_n) = a_1 \cdots a_n$

Ma anche se A è triangolare superiore

$A_1 = (a_{11}\, 0 - 0) + (0\, a_{12} - a_{1n})$

$A_2 = (0\, a_{22}\, 0 - 0) + (0, 0, a_{23}\, a_{2n})$

⋮

$A_n = (0 \text{ —— } 0\, a_n$

in tutti i casi il secondo addendo della riga i ci dà una matrice con una colonna di zeri

Quindi $d(A) = d\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$

Morale: se d esiste la sappiamo calcolare, per cui se esiste d è unica. Per dimostrare che d esiste ci serve una definizione

- A_{ij} è la matrice A privata della riga i e della colonna j
- $d_h = d : M(h,h) \to R$

Teorema C'è un'unica $d_n: M(n,n) \to$ che verifichi A, B, C, D.

Fissato j, $d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} d_{n-1} A_{ij}$

= formula di Laplace per la colonna j (ricorsiva su n).

prova: per induzione su n. $n=1$ $d_1(a)=a$

$n=2$ $\cdot$ $d_2(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

Per ipotesi induttiva d_{n-1} verifica A, B, C, D. Vediamole per d_n

(D) $d_n(I)=(-1)^{i+i}1\cdot d_{n-1}(I_{ii})=d_{n-1}(I_{n-1})=1$

Ora supponiamo

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\ A'_{i_0}+A''_{i_0}\\ A_n\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}A_1\\ A'_{i_0}\\ A_n\end{pmatrix},\quad A''=\begin{pmatrix}A_1\\ A''_{i_0}\\ A_n\end{pmatrix}$$

e dobbiamo provare $d_n(A)=d_n(A')+d_n(A'')$.

Osserviamo che

$$a_{ij}=a'_{ij}=a''_{ij} \text{ se } i\neq i_0$$

$$a_{i_0j}=a'_{i_0j}+a''_{i_0j}$$

Per gli A_{ij} è l'opposto

$$A_{i_0j}=A'_{i_0j}=A''_{i_0j}$$

mentre se $i\neq i_0$ A_{ij} ha la riga i_0 somma di 2 righe.

Quindi

$$d_n(A)=\sum_{i=1}^{i_0-1}(-1)^{i+j}a_{ij}\,d_{n-1}(A_{ij})+(-1)^{i_0+j}(a'_{i_0j}+a''_{i_0j})\,d_{n-1}(A_{i_0j})+$$

$$+\sum_{i=i_0+1}^{n}(-1)^{i+j}d_{n-1}(A_{ij})$$

Poiché $d_{n-1}A_{ij}=d_{n-1}(A'_{ij})+d_{n-1}(A''_{ij})$ $\forall i=i_0$ mettendo insieme tutti i $'$ e tutti i $''$ otteniamo

$$d_n(A)=d_n(A')+d_n(A'').$$

Ogni addendo alla somma è somma di due termini uno con ' e uno con ''

$$d_{n-1}(A_{ij}) = d_{n-1}(A'_{ij}) + d_{n-1}(A''_{ij})$$

mentre per $i = i_0$ $(-1)^{i_0+j}[a'_{i_0 j} d_{n-1} A_{i_0 j} + a''_{i_0 j} d_{n-1} A_{i_0 j}]$

Mettendo insieme gli addendi con ' si ottiene $d_n(A')$, gli altri danno $d_n(A'')$

Se invece $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \lambda A_{i_0} \\ A_n \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{i_0} \\ A_n \end{pmatrix}$

abbiamo come prima $a_{ij} = a'_{ij}$ se $i \neq i_0$, $a_{i_0 j} = \lambda a'_{i_0 j}$

Ancora A_{ij} con $i \neq i_0$ ha una riga moltiplicata per λ

Quindi $d_{n-1} A_{ij} = \lambda d_{n-1}(A'_{ij})$. Dunque in ogni addendo c'è λ che si porta fuori dalla somma e quindi

$$d_n(A) = \lambda d_n(A')$$

Resta la proprietà (A). Supponiamo $A_{i_0} = A_{j_0}$. Allora se $i \neq i_0, j_0$ $d_{n-1}(A_{ij}) = 0$ perchè A_{ij} ha due righe uguali. Quindi

$$d_n(A) = (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} d_{n-1}(A_{i_0 j}) + (-1)^{j_0+j} a_{j_0 j} d_{n-1}(A_{j_0 j})$$

intanto $a_{i_0 j} = a_{j_0 j}$. Inoltre ~~le~~ matrici $A_{i_0 j}$ e $A_{j_0 j}$ hanno le stesse righe in ordine diverso.

$A_{j_0 j}$ diventa $A_{i_0 j}$ se la sua riga i_0 scivola al posto j_0

⑥

$$A_{j_0 j} = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i_0} \\ A_{i_0+1} \\ A_{j_0-1} \\ A_{j_0+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

A_{i_0} deve scendere

$A_{i_0+1}, \dots, A_{j_0-1}$

cioè deve fare $j_0 - i_0 - 1$ scambi

quindi $d_{n-1}(A_{j_0 j}) = (-1)^{j_0 - i_0 - 1} d_{n-1}(A_{i_0 j})$

sostituiamo:

$$d_n(A) = (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \cdot d_{n-1}(A_{i_0 j}) + (-1)^{j_0+j} a_{i_0 j} d_{n-1}(A_{j_0 j}) =$$

$$= a_{i_0 j} d_{n-1}(A_{i_0 j}) \left[(-1)^{i_0+j} + (-1)^{j_0+j} \cdot (-1)^{j_0 - i_0 - 1} \right]$$

e dobbiamo provare che $[\quad] = 0$

intanto moltiplichiamo per $(-1)^j$ così leviamo j

$\left[(-1)^{i_0} + (-1)^{\cancel{j_0} + \cancel{j_0} - i_0 - 1} \right]$ se i_0 è pari, $-i_0 - 1$ è dispari e viceversa quindi $(-1)^{i_0} + (-1)^{-i_0-1} = 0$ e

$d_n(A) = 0$.

La funzione d_n si chiama determinante e si può calcolare su una colonna qualsiasi per unicità.

Ora vediamo che si può fare per riga.

<u>Proposizione</u> $\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

<u>prova</u> Possiamo scrivere

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} = a_{i1} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ e_1^T \\ A_n \end{pmatrix} + a_{i2} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ e_2^T \\ A_n \end{pmatrix} + \; a_{in} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ e_n^T \\ A_n \end{pmatrix}$$

perché $A_i = a_{i1}(1\,0 - 0) + a_{i2}(0\,1\,0 - 0) + \dots + a_{in}(0 - 0\,1)$,

Chiamiamo $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ e_1^T \\ A_n \end{pmatrix}$ - - - - $B_n = \begin{pmatrix} A_1 \\ e_n^T \\ A_n \end{pmatrix}$

e quindi $\det A = a_{i1} \det B_1 + \quad + a_{in} \det B_n$.

Ora B_j ha la riga i con $b_{ij} = 1$ e $b_{ik} = 0$ per $k \neq 0$

Se operiamo con questa riga sulle righe precedenti e seguenti con Gauss possiamo avere zeri sopra e sotto b_{ij} senza alterare il $\det B_j$

$$\det B_j = \det C_j = \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & & & \\ | & & | & | & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \end{matrix}$$

$\det A = \sum a_{ij} \det C_j$. Ma $\det C_j = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Quindi $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ che è la formula di Laplace per la riga i.

<u>Corollario</u> $\det A = \det A^T$

prova per induzione su n. Per $n=1$ o $n=2$ è vero

supponiamo vera per $n-1$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det (A_{ij})^T$$

Ma a_{ij} è l'elemento di posto $j\,i$ in A^T

Quindi $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})^T = \det A^T$ per la formula di Laplace sulla colonna i di A^T.

Corollario 2

Per calcolare $\det A$ si possono fare mosse di Gauss per mettere un po' di zeri. Ma $\det A = \det A^T$ ci dice che possiamo fare lo stesso sulle colonne

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{C^2 - C^3}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = $$

$$= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)(-1) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

eccetera.