APPENDICE ALLA LEZIONE 8 23/11/2022

Abbiamo visto il prodotto di matrici righe per colonne. Proprietà

1. $(A+B)C = AC + BC \qquad A \cdot (B+C) = AB + AC$
2) $(\lambda A) B = \lambda AB \quad , (AB)C = A(BC) = ABC$
3) $A I_q = A \quad I_p A = A \quad$ se $A \in M(p,q)$
4) $O_p A = O, \ A \cdot O_q = O$
5) $(AB)^T = B^T A^T$

6) Se A, B sono invertibili in $M(n,n)$ AB è invertibile e
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
7) A invertibile A^{-1} è unica: se $AB = I$ e $B_1 A = I$ si ha

$$B_1 A B = (B_1 A) B = I B = \underbrace{B = B_1(AB) = B_1 I = B_1}_{=}$$

Torniamo alle matrici associate a $T: V \to W$
Poniamo $n = \dim V$, $s = \dim W$
Siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{B}' = (v_1' \dots v_n')$ basi di V.
e $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_s)$ e $\mathcal{C}' = (w_1' \dots w_s')$ basi di W
Allora si ha

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[r, "T"] \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{C}'}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] \arrow[rrr, bend right, "A'"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s & \mathbb{R}^s \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

$$A = \varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Quindi

$$A' = N^{-1} A M$$

Questa è una relazione di equivalenza in $M(s,n)$. Ovvero è una relazione:

- riflessiva $A \sim A$ basta prendere $M = I_n$, $N = I_s$
- simmetrica $A \sim A' \iff A' \sim A$ $A' = N^{-1}AM \Rightarrow$
  $\Rightarrow N A' M^{-1} = A$
- transitiva $A \sim A'$, $A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$
  $A' = N^{-1}AM$ $A'' = N_1^{-1}A'M_1 \Rightarrow$

  $A'' = N_1^{-1}N^{-1}AMM_1 = (NN_1)^{-1}A(MM_1)$
  si chiama equivalenza sinistra - destra

Teorema

1) Se A è associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e A' è pure associata a T rispetto ad altre basi allora A è equivalente ad A'
2) Se A è associata a T rispetto a basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e A' è equivalente ad A cioè $A' = N^{-1}AM$ allora A' è associata a T rispetto alle basi date da N e M.
3) $A \sim A' \iff$ ~~A~~ $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$

prova 1 lo abbiamo visto

2 Le colonne di M sono ~~vettori~~ le coordinate ~~..~~ di indipendenti che danno una base $\mathcal{B}'$ di V. Analogamente N dà una nuova base $\mathcal{C}'$ di W. La matrice associata a T rispetto ~~ad~~ $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ è $A' = N^{-1}AM$.

3) Supponiamo che $\dim \operatorname{Im} T = r$. Quindi $\dim \operatorname{Ker} T = n - r$
Prendiamo $(v_1, \dots, v_{n-r})$ base di $\operatorname{Ker} T$ e completiamo

a base di V $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{n-r}, v_{n-r+1}, \dots, v_n)$

Dal teorema della dimensione sappiamo che gli r vettori
$T(v_{n-r+1}), \dots, T(v_n)$ sono una base di $\operatorname{Im} T$
completiamo a base di W aggiungendo $s-r$ vettori

$$\mathcal{C} = (T(v_{n-r+1}), \dots, T(v_n), w_{r+1}, \dots, w_s) \text{ base di } W$$

La matrice associata a T è

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte le matrici in $M(s,n)$ di rango r sono equivalenti ad A^* e viceversa. r è un invariante completo.

<u>Osservazione</u> Se $T: V \to \cancel{W}$ è lineare, basta scegliere una base $\mathcal{B}$ di V e si ha una matrice associata A. Se si cambia base con M, la nuova matrice sarà

$$A' = M^{-1} A M$$

anche questa è una rel. d'equivalenza in $M(n,n)$ che si chiama similitudine. A' è simile ad A.

Ma è più complicato trovare un invariante completo

Esempio: Matrice associata a $T: M(n,n) \to M(n,n)$
$$T(A) = A + A^T$$
rispetto alla base canonica $\{E_{ij}\}$
Lo scriviamo per $n=2$ $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$T(E_{11}) = E_{11} + E_{11} = 2E_{11}$$

$$T(E_{12}) = E_{12} + E_{21}$$

$$T(E_{21}) = E_{12} + E_{21}$$

$$T(E_{22}) = E_{22} + E_{22} = 2E_{22}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora cambiamo base

$$\left(E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}, E_{12}-E_{21}\right) \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{11}) = 2E_{11}$$

$$T(E_{12}+E_{21}) = 2(E_{12}+E_{21})$$

$$T(E_{22}) = 2E_{22}$$

$$T(E_{12}-E_{21}) = E_{12}+E_{21} - (E_{21}+E_{12}) = 0$$

Quindi $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Provate a fare lo stesso per

$$T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$$

$$T(p(x)) = x\,p'(x)$$

rispetto alla base canonica e a $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x^3)$