Lezione 10.12.2020

Definiamo $T: V \to V$ triangolabile se V ha una base $(v_1 - v_n)$ tale che la matrice associata T in questa base sia triangolare superiore. Ecco che cosa possiamo dire.

Teorema $T: V \to V$ è triangolabile $\Leftrightarrow$ tutti i suoi autovalori sono reali.

<u>prova</u> $\Rightarrow$ è chiaro: tra le matrici associate a T ce ne è una triangolare superiore
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ 0 & a_{22} & \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \, - \, 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
quindi gli autovalori di T sono a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{nn}$.

$\Leftarrow$ lo proviamo per induzione su $n = \dim V$.

Se $\dim V = 1$ tutto è banale.

Supponiamo il teorema vero per endomorfismi di spazi di dim $\leq n-1$ e proviamolo per n.

Poiché gli autovalori di T sono reali, c'è $v_1 \neq 0$ autovettore di T. Completiamo a base di V $(v_1 - v_n)$

Scriviamo la matrice di T rispetto a questa base
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & & & \\ | & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
$$\det(A - xI) = (\lambda_1 - x)\det(B - xI_{n-1})$$
quindi anche B ha autovalori tutti reali.

Dobbiamo trovare uno spazio di dim. $n-1$ e un suo endomorfismo di cui B sia la matrice associata rispetto a una sua base.

Sia $W = \text{span}(v_2 - v_n)$. W non è invariante per T

Ma $V = \text{span}(v_1) \oplus W$, quindi possiamo comporre $T|_W$ con la proiezione su W

$Pr_W \circ T|_W : W \to W$ è un endomorfismo e rispetto alla base $(v_2 - v_n)$ la matrice associata è B. Vale l'ipotesi induttiva. C'è una base $v_2' - v_n'$ tale che la matrice associata a $Pr_W \circ T|_W$ in questa base è triangolare superiore.

Sia $N \in M(n-1, n-1)$ la matrice che porta $v_2, \dots, v_n$ in $v_2', \dots, v_n'$. Quale matrice rappresenta il cambiamento di base $(v_1 - v_n) \to (v_1, v_2', \dots, v_n')$?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; \text{—} \; 0 \\ 0 & \\ | & N \\ 0 & \end{pmatrix}$$

è quella che ci vuole. Quindi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; \text{—} \; 0 \\ 0 & \\ | & N^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a'_{11} \quad a'_{1n} \\ 0 & \\ | & N^{-1} B N \\ 0 & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & a'_{11} \quad a'_{1n} \\ 0 & \\ | & T_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$ è triangolare superiore

<u>Corollario</u> se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ogni suo endomorfismo è triangolabile

prova: teorema fondamentale dell'algebra.

C'è un secondo criterio di diagonalizzazione legato ai polinomi che si annullano su un endomorfismo:

Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ un polinomio e A una matrice quadrata

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_d A^d \in M(n,n)$$

Definiamo $\mathcal{I}_A = \{p(x) : p(A) = 0 \in M(n,n)\}$

1. $\mathcal{I}_A$ non è $\{0\}$. Infatti I e le potenze di A non possono essere tutte indipendenti visto che appartengono ad uno spazio di dimensione finita.

2. $\mathcal{I}_A$ è chiuso per somma e inoltre $\forall\, q(x)$ se $p(x) \in \mathcal{I}_A$ anche $p(x)$ per $q(x) \in \mathcal{I}_A$.

3. $\mathcal{I}_A \ni 0$ ed contiene polinomi non nulli di grado minimo. Sia d_0 il grado minimo e sia $m(x) = a_0 + a_1 x \quad + x^{d_0}$ (coeff. del monomio di grado massimo è 1).
Ogni polinomio di $\mathcal{I}_A$ è divisibile per $m(x)$.

prova: 1, 2 sono facilmente verificabili.

3. Sia $p(x) \in \mathcal{I}_A$. Allora possiamo dividerlo per $m(x)$. $p(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x)$ dove

il grado di $r(x)$ è strettamente minore del grado d_0 di $m(x)$. Ora calcoliamo in A.

$$0 = p(A) = m(A)q(A) + r(A)$$

perché $p \in J_A$ $\quad$ 0

$\Rightarrow r(A)=0$ ma non ci sono in J_A polinomi di grado $< d_0$, a parte il polinomio nullo. $\Rightarrow r(x)$ è il polinomio nullo, quindi $p(x)=m(x)q(x)$ è un multiplo di $m(x)$.

Proposizione Se λ è autovalore di A, allora ~~m(λ)~~ $m(\lambda)=0$.

prova sia $X \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a λ.

$$m(A)X = 0 = a_0 X + a_1\lambda X + a_2\lambda^2 X \dots + \lambda^{d_0} X =$$

$$= m(\lambda) X$$

Ma $X \neq 0 \Rightarrow m(\lambda)=0$

Quindi tutti gli autovalori sono radici di m.

~~Possiamo anche~~

Altra osservazione

Prop Se B è simile ad A allora $J_B = J_A$. In particolare hanno lo stesso polinomio minimo

prova Sia $p(x) \in J_A$ e calcoliamo $p(B)$.

Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

$p(B) = a_0 I + a_1 B + \dots + a_d B^d$

ma $B = M^{-1}AM$

$B^2 = M^{-1}AMM^{-1}AM = M^{-1}A^2M$

$\vdots$

$B^d = M^{-1}AM \dots M^{-1}AM = M^{-1}A^dM$

Dato che $I = M^{-1}M$ possiamo mettere in evidenza M^{-1} a sinistra e M a destra e quindi

$p(B) = M^{-1}p(A)M$. Poiché $p(A) = 0 \in M(n,n)$ anche $p(B) = 0$. Questo prova che $\mathcal{I}_A \subset \mathcal{I}_B$. Scambiando il ruolo di A e di B si prova $\mathcal{I}_B \subset \mathcal{I}_A$ e quindi $\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_A$.

Quindi $m(x)$ dipende solo dalla classe di simili-tudine e si può parlare di polinomio minimo di un endomorfismo.

Il secondo criterio di diagonalizzabilità è il seguente.

<u>Teorema</u> $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ il suo polinomio minimo ha radici solo reali e tutte di molteplicità 1.

prova del verso $\Rightarrow$ Se T è diagonalizzabile i suoi autovalori $\lambda_1 - \lambda_k$ sono tutti reali e V è somma diretta degli autospazi

$$V = V_{\lambda_1} \oplus - \oplus V_{\lambda_k}$$

Si noti che $T - \lambda_1 I_d$ si annulla su V_{λ_1}, $T - \lambda_2 I_d$ si annulla su V_{λ_2}, $-$, $T - \lambda_k I_d$ si annulla su V_{λ_k}. Quindi il polinomio $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ si annulla su T perché la composizione

$$(T-\lambda_1 I_d)\circ(T-\lambda_2 I_d)\cdots\circ(T-\lambda_k I_d)$$ si annulla

su $V_{\lambda_1}, -, V_{\lambda_k}$ e quindi si annulla su V.

Questo è il polinomio minimo di T perché ha come radici gli autovalori di T e tutti di molteplicità 1. Nessun altro polinomio che abbia $\lambda_1, -, \lambda_k$ come radici può avere grado minore. Quindi $\Rightarrow$ è provato. La prova di $\Leftarrow$ è sulle dispense on line.

$\blacksquare$

Definizione: sia $P \in M(n, n, \mathbb{R})$. P si dice ortogonale se $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle Px, Py \rangle = \langle x, y \rangle$

Se P conserva il prodotto scalare le sue colonne $p^1 \dots p^n$ devono essere una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Infatti $p^j = P e_j$, quindi

$$< P_j, P_j > = < P e_j , P e_j > = < e_j, e_j > = 1 \text{, mentre}$$

$$\underset{k \neq j}{< P_j\, P_k >} = < P e_j, P e_k > = < e_j, e_k > = 0$$

Ma allora $P^T P = I$ perché le righe di P^T sono le colonne di P.

Introduciamo in $\mathbb{C}^n$ una specie di prodotto scalare che ci calcoli la lunghezza dei vettori

Se $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ il teorema di Pitagora ci dà che $\left(\text{lunghezza}(z)\right)^2 = \left(\text{lung } z_1\right)^2 + \quad + \left(\text{lung } z_n\right)^2$

Ora se w è un numero complesso si ha

$(\text{lungh } w)^2 = |w|^2 = x^2 + y^2$ se $w = x + iy$ ovvero

$$|w|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = w\overline{w}$$

Quindi per $z \in \mathbb{C}^n$ $|z|^2 = z_1\overline{z}_1 + \quad + z_n\overline{z}_n$

Allora possiamo definire

$$< z, w > = z^T \overline{w} = z_1 \overline{w}_1 + \cdot + z_n \overline{w}_n$$

Questo è chiamato PRODOTTO HERMITIANO.
Verifica

$$\langle z_1+z_2, w\rangle = \langle z_1, w\rangle + \langle z_2, w\rangle$$

$$\langle z, w_1+w_2\rangle = \langle z, w_1\rangle + \langle z, w_2\rangle$$ ma

$$\langle \lambda z, w\rangle = \lambda\langle z, w\rangle$$ (è lineare in z, ma

$$\langle z, \lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle z, w\rangle$$ non è lineare in w è antilineare).

Se P è ortogonale che succede con questo prodotto?

$$\langle Pz, Pw\rangle = (Pz)^T\overline{Pw} = z^T P^T \bar{P} w$$, ma P

è reale $\bar{P}=P$ dunque

$$\langle Pz, Pw\rangle = z^T \cancel{P^T P}\,\overline{w} = z^T\overline{w} = \langle z, w$$

Quindi P conserva anche il prodotto in $\mathbb{C}^n$.

Esercizio: dimostrare che le matrici ortogonali verificano:

1) Tutti gli autovalori (reali e complessi) hanno modulo 1
2) Se $H\subset\mathbb{R}^n$ è invariante per P, anche $H^\perp$ lo è
3) Sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$.

Esempio: la rotazione $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ha

autovalori 1, $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, $\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$ e verifica 1, 2, 3.

Vediamo ora le matrici simmetriche $A = A^T$

Per il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T A y = \langle x, Ay\rangle$$

Per il prodotto hermitiano di $\mathbb{C}^n$

$$\langle Az, w\rangle = (Az)^T \overline{w} = z^T A^T \overline{w} = z^T A \overline{w} =$$

$$= z^T \overline{A}\,\overline{w} = \langle z, Aw\rangle$$

Per le matrici simmetriche vale il teorema spettrale.

Teorema. Sia $A = A^T \in M(n, n, \mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale formata da autovettori di A

Significa: 1) gli autovalori di A sono tutti reali

2) Gli autospazi di A sono in somma diretta ortogonale.

3) La somma degli autospazi di A dà tutto $\mathbb{R}^n$