ultima lezione 14.12.2022 (1)

Definizione Una matrice $P \in M(n,n,\mathbb{R})$ si dice ortogonale se $\langle Px, Py\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y, \in \mathbb{R}^n$

Proprietà 1) Le colonne di P sono le immagini di $e_1, \ldots, e_n$, quindi $\langle P^1, P^1\rangle = 1$ e $\langle P^i, P^j\rangle = 0$

$\Rightarrow$ le colonne di P sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

2) l'inversa di P è P^T (provare per credere)

3) anche P^T è ortogonale

Esempio le rotazioni in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ e

Autovettori e autovalori

$T: V \to V$ $\quad v \neq 0$ si dice autovettore di T se $T(v) = \lambda v$ $\quad \lambda$ si dice autovalore.

Esempio se $v \neq 0$ $v \in \operatorname{Ker} T$ v è autovettore con autovalore 0.

L'insieme degli autovettori di autovalore λ unito a $\vec{0}$ è un sottospazio di V detto autospazio V_λ di λ $\quad T|_{V_\lambda} = \lambda \, id_{V_\lambda}$

Come si trovano gli autovalori? Se λ è autovalore di T $\quad T - \lambda\, id_V$ ha rango $< \dim V$ perché il nucleo $V_\lambda \neq \{0\}$. Quindi se fissiamo $\mathcal{B}$ base di V e A è la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$, l'equazione

$$\det(A - xI) = 0$$

ha come radici gli autovalori di T. Infatti se λ è autovalore $\det(A-\lambda I)=0$ e se x_0 verifica

$\det(A - x_0 I) = 0$ $\quad \operatorname{Ker}(A - x_0 I) = V_{x_0} \neq \{0\}$.

Osservazione

1) $\det(A - xI)$ è un polinomio di grado n in x che non dipende da $\mathcal{B}$. Infatti se A' è simile ad A (e quindi rappresenta T rispetto a una base $\mathcal{B}'$) si ha $\quad A' = M^{-1}AM$ e

$$\det(A' - xI) = \det(M^{-1}AM - xM^{-1}IM) =$$
$$= \det(M^{-1}(A - xI)M) = \det(A - xI)$$

2) Il nostro polinomio si chiama polinomio caratteristico: il suo termine noto è $\det A$ e il termine di grado massimo è $(-1)^n x^n$, il successivo è $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$, che sono tutti invarianti per similitudine.

3) Se p_T è il pol caratteristico di T e A rappresenta T rispetto a una base $\mathcal{B}$ $\quad p_T(A) = 0$ (matrice nulla) (Teorema di Hamilton Cayley).

Definizione T è diagonalizzabile se V ha una base di autovettori di T

A è diagonalizzabile se nella sua classe di similitudine c'è una matrice diagonale. E' triangolabile se c'è una matrice triangolare superiore.

Osservazione se T è diagonalizzabile le radici di p_T sono tutte reali: per esempio, una rotazione attorno all'asse x di angolo $\pi/3$ non è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ 0 & \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix}$$ provare per credere.

Se λ è autovalore di T $m_a(\lambda)$ è il numero tale che $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)} \mid p_T(x)$ ma $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)+1}$ non divide p_T

$m_a(\lambda)$ = molteplicità algebrica

$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$ = molteplicità geometrica ($V_\lambda = \ker(T-\lambda\,\mathrm{id}_V)$)

Fatto $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim V_1 = 1$, $m_a(1) = 2$

Esercizio se P è ortogonale e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di P $\Rightarrow \lambda = \pm 1$

Teorema T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ p_T ha solo radici reali e per ogni autovalore λ $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

prova. Se T è diagonalizzabile ha una base di autovettori $v_1, \dots, v_n$. possiamo ordinarli secondo gli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_k$ ha allora $V = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \quad + V_{\lambda_k}$

~~e poiché~~ e quindi $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) \geq \dim V$

Questo ci dice che $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ e poiché

$$\sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = \dim V \leq \sum m_g(\lambda_i) \quad e \quad m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$$

ci dice anche $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

Per provare il viceversa ci serve un lemma

<u>Lemma</u> Autovettori $v_1, \dots, v_k$ relativi ad autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti diversi sono indipendenti.

Dim: per induzione su k

$k = 1$ $\quad v_1 \neq 0$ è indipendente.

Per ipotesi induttiva, dati $v_1 \dots v_k$, $v_1 \dots v_{k-1}$ sono indipendenti. Supponiamo

$$* \qquad a_1 v_1 + \qquad + a_k v_k = 0 \qquad \text{Dobbiamo provare } a_i = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Applichiamo T: $T(a_1 v_1 + \quad + a_k v_k) = T(0) = 0 =$

$= \lambda_1 a_1 v_1 + \qquad + \lambda_k a_k v_k$. Sostituiamo $a_k v_k = -\sum_{j=1}^{k-1} a_j v_j$

$$\lambda_1 a_1 v_1 + \qquad + \lambda_{k-1} a_{k-1} v_{k-1} \cancel{- \sum_{j=1}^{k-1} a_j v_j} - \lambda_k \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_j v_j \right) = 0 =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_k) a_1 v_1 + \quad \dots \quad + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) a_{k-1} v_{k-1} = 0$$

$\lambda_k \neq \lambda_j$, $v_1 - v_{k-1}$ indip. $\Rightarrow a_1 = a_2 = \qquad = a_{k-1} = 0$

Quindi $*$ diventa $\quad a_k v_k = 0 \Rightarrow a_k = 0$ perché $v_k \neq 0$

<u>Corollario</u> Gli autospazi di T sono in somma diretta.

<u>Fine prova teorema</u>

Per ipotesi p_T ha solo radici reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e per ogni i $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$. Ma $\sum_i m_a(\lambda_i) = \sum_i m_g(\lambda_i) =$ $=$ dim V.

Dunque $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ e quindi T è diagonalizzabile.

Esempio (teorema spettrale) (

$A = A^T \Rightarrow \mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori di A. In particolare A è diagonalizzabile e si diagonalizza con una matrice ortogonale.

Non proviamo il teorema spettrale. Chi è curioso lo trova sulla dispensa "Matrici e prodotto scalare"

<u>Teorema</u> Se p_T ha tutte radici reali, T è triangolabile

<u>Prova</u> Siano λ_1 un autovalore e v_1 un autovettore di λ_1. Completiamo a base di V. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

La matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Si noti che $p_T(x) =$

$= \det(A - xI) = (\lambda_1 - x)\det(B - xI_{n-1})$

Quindi anche B ha autovalori reali.

Che cosa è B

$$B : span(v_2 - v_n) \to span(v_2, -, v_n) \text{ e si ha}$$

$$B = pr_W A|_W \quad W^{\perp}$$

pr_W è la proiezione su W parallelamente a v_1

poiché se $n=1$ $A=(a)$ è già triangolare possiamo provare il teorema per induzione su n.

Per ipotesi induttiva B è triangolabile cioè $\exists N$ $(n-1)\times(n-1)$ invertibile tale che $N^{-1}BN$ è triangolare superiore. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \\ | & N \\ 0 & \end{pmatrix}$ allora $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ 0 & \\ | & N^{-1}BN \\ 0 & \end{pmatrix}$

è triangolare superiore $\square$

Esercizio: dimostrare che si possono prendere N e M ortogonali.

Hint per $n=1$ OK vero per $n-1$ che si triangola con una matrice ortogonale

v_1' = autovettore di λ $v_1 = \frac{v_1'}{|v_1'|}$ ha norma 2

Completiamo a base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1 - v_n)$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & e_2 - e_n \\ 0 & \\ | & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Hip induttiva

$Q^T B Q$ triangolare sup.

$$P = \begin{matrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \\ 0 & Q \\ 0 & \end{matrix}$$

triangola A