# SPAZI DI SOBOLEV

Lu 19/11/18 (1)

Alcuni preliminari

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^N$. Lo spazio $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, è

$$L^p(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}} \text{ misurabili, con } \int_\Omega |f(x)|^p dx<\infty\right\};$$

la norma in $L^p(\Omega)$, che rende tale spazio uno spazio di Banach, è

$$\|f\|_p=\left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Se $p=\infty$,

$$L^\infty(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}} \text{ misurabili: } \sup_\Omega \mathrm{ess}|f|<\infty\right\},$$

ove

$$\sup_\Omega \mathrm{ess}|f|=\inf\left\{\lambda\in\mathbb{R}^+ : m_N\{x\in\Omega : |f(x)|>\lambda\}=0\right\};$$

la norma in $L^\infty(\Omega)$, che rende tale spazio uno spazio di Banach, è

$$\|f\|_\infty=\sup_\Omega \mathrm{ess}|f|.$$

Si chiama poi $L^p_{loc}(\Omega)$, $1\le p\le\infty$, lo spazio vettoriale delle funzioni $u:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ misurabili, tali che $u\in L^p(\Omega')$ per ogni aperto $\Omega'$ con $\Omega'\subset\subset\Omega$ (cioè $\overline{\Omega'}$ è compatto $\subset\Omega$).

Derivate parziali e multi-indici: un multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ è un vettore N-dimensionale a componenti in $\mathbb{N}$, dunque un elemento di $\mathbb{N}^N$. Dati 2 multi-indici $\alpha,\beta$, poniamo

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j!, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{n} \binom{\alpha_j}{\beta_j},$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad \underline{x}^\alpha = \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j}.$$

Ovviamente, $\frac{\partial}{\partial x_i} = D^{e_i} f$, ove $e_i = (0,0,\dots 1,\dots 0)$ con la componente i-sima uguale a $1$.

<u>Convoluzioni e mollificatori</u> Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ossia $\varphi \in C^\infty$ e il supporto di $\varphi$, cioè la chiusura dell' insieme $\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\}$, è compatto); supponiamo che

$$\varphi(x) = 0 \text{ su } B(0,1)^c, \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_{B(0,1)} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Ad esempio, si può scegliere

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_N \exp \frac{1}{|x|^2 - 1} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ove $c_N > 0$ è tale che

$$c_N \int_{B(0,1)} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Posto $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\varepsilon x)$, si ha $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi_\varepsilon \geq 0$, $\varphi_\varepsilon = 0$ su $B(0,\varepsilon)^c$, $\int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$. Si dice che $\varphi_\varepsilon$ è un <u>mollificatore</u>

Consideriamo, per $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, la <u>convoluzione</u>

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-z)\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz.$$

Si noti che

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} u(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)} u(x-z)\,\varphi_\varepsilon(z)\,dz\,,$$

e in particolare l'integrale ha senso e dipende solo dai valori di $u$ in $B(x,\varepsilon)$.

Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, e prolunghiamo $u$ a $0$ fuori di $\Omega$, avrò ancora senso considerare $u * \varphi_\varepsilon(x)$, che dipenderà dai valori di $u$ in $B(x,\varepsilon) \cap \Omega$.

L'importanza dei mollificatori sta nel risultato che segue.

<u>Teorema 1</u> Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, con $u=0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Si ha:

(i) $u * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$; se $u$ ha supporto compatto in $\Omega$, allora $u * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo.

(ii) Se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, allora $u * \varphi_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

(iii) Se $u \in C(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$, allora $u * \varphi_\varepsilon \to u$ uniformemente in $\overline{\Omega'}$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

<u>dim</u> (i) $u * \varphi_\varepsilon(x) = 0$ per ogni $x$ tale che $d(x,\Omega) > \varepsilon$. Se $u$ ha supporto $K$ compatto in $\Omega$, allora $u * \varphi_\varepsilon(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$ tale che $d(x,K) > \varepsilon$, purché $\varepsilon < d(K,\partial\Omega)$. Si ha $u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty$ perché $D^\alpha u * \varphi_\varepsilon(x) = u * D^\alpha \varphi_\varepsilon(x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ (convergenza dominata).

Proviamo (iii). Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Se $x \in \overline{\Omega'}$ si ha

$$|u * \varphi_\varepsilon(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} [u(x-y) - u(x)]\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |u(x-y) - u(x)|\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy \leq$$

$$\leq \sup_{y \in B(0,\varepsilon)} |u(x-y) - u(x)| \cdot 1 .$$

Poichè $u \in C(\overline{\Omega'})$, $u$ è uniformemente continua in $\overline{\Omega'}$, e dunque si ha

$$|u(x-y) - u(x)| < \sigma \quad \forall x \in \Omega',\ \forall y \in B(0,\varepsilon)$$

purchè $0 < \varepsilon < \delta_\sigma$. Ne segue $u * \varphi_\varepsilon \to u$ uniformemente in $\overline{\Omega'}$.

Proviamo (ii). Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Allora $C_0^0(\overline{\Omega'})$ è denso in $L^p(\Omega')$ (questo fatto è noto a priori: le funzioni semplici, nulle fuori da un insieme di misura finita, sono dense in $L^p(\mathbb{R}^N)$; ognuna di queste è approssimabile in $L^p(\Omega')$ da funzioni di $C^0 \cap L^p(\Omega')$; infine, ogni funzione di $C^0 \cap L^p(\Omega')$ è approssimabile in $L^p(\Omega')$ da funzioni di $C_0^0(\overline{\Omega'})$, e ciò implica quanto richiesto).

Dunque vi è $v \in C_0^0(\Omega')$ tale che $\|u - v\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon$.

Allora

$$\|u * \varphi_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u * \varphi_\varepsilon - v * \varphi_\varepsilon\|_p + \|v * \varphi_\varepsilon - v\|_p + \|v - u\|_p \leq$$

$$\leq \|u - v\|_p + \|v * \varphi_\varepsilon - v\|_p + \|u - v\|_p \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + m_N(\Omega')^{1/p} \sup_{\Omega'} |v * \varphi_\varepsilon - v| ,$$

e ciò prova che $u * \varphi_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega')$. $\square$

Osservazioni (1) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Infatti

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, dy \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right]^p dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|\, dy \right]^p dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, dy \right]^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)|^p dy\, dx =$$

$$= \|f\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^p \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, dx\, dy =$$

$$= \|f\|_1^{\frac{p}{p'}+1} \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \|g\|_p^p .$$

(2) Detti $K_f$, $K_g$ e $K_{f*g}$ i supporti di $f$, di $g$ e di $f*g$, risulta

$$K_{f*g} \subseteq \overline{K_f + K_g} .$$

Infatti, sia $x \notin \overline{K_f + K_g}$: allora esiste una palla $B(x,r)$ disgiunta da $K_f + K_g$, ossia vale $x' - y \notin K_f$ $\forall y \in K_g$ e $\forall x' \in B(x,r)$. Perciò

$$f(x'-y) g(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,\ \forall x' \in B.$$

Dunque, integrando su $\mathbb{R}^N$, $f*g(x') = 0$ $\forall x' \in B(x,r)$, cioè $x \notin K_{f*g}$

$\square$

# Lemmi fondamentali del calcolo delle variazioni

Il primo lemma vale per ogni aperto di $\mathbb{R}^N$. Il secondo, per adesso, lo proviamo in dimensione 1, ma ne vedremo una opportuna estensione a qualunque dimensione.

Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

**Lemma 2** Se $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, allora $f = 0$ q.o.

dim. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Siccome $C_0^\infty(\Omega')$ è denso in $C_0^0(\Omega')$, si ha

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^0(\Omega).$$

Ne segue, per ogni $S \subset \Omega'$ misurabile,

$$\int_\Omega f(x)\chi_S(x)dx = 0,$$

poichè esiste $\{\varphi_n\} \subseteq C_0^0(\Omega)$ tale che $\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx \to \int f(x)\chi_S(x)dx$ (si costruisce $\{\varphi_n\}$ tale che $\varphi_n \to \chi_S$ puntualmente e $\varphi_n \leq \chi_S$, e si ha la tesi per convergenza dominata).

Posto $S = \{x \in \Omega' : f(x) > 0\}$, si ricava allora $m_N(S) = 0$; poi, scelto $S' = \{x \in \Omega' : f(x) < 0\}$, si deduce $m_N(S') = 0$. Perciò $f = 0$ q.o. in $\Omega'$. Poichè $\Omega' \subset\subset \Omega$ è arbitrario, $f = 0$ q.o. in $\Omega$. $\square$

**Lemma 3** Se $N=1$, se $f \in L^1_{loc}(I)$ e se $\int_I f(x)\varphi'(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ q.o. in $I$.

__dim.__ Sia $J \subset\subset I$. Se $\varphi \in C_0^\infty(J)$, allora $\varphi' \in C_0^\infty(I)$ e $\int_I \varphi'(x)\,dx = 0$. Perciò, per ipotesi, $\int_I f\psi\,dx = 0$ $\forall \psi \in C_0^\infty(J)$ con $\int_J \psi(x)\,dx = 0$ [ogni $\psi$ di questo tipo è $= \varphi'$, con $\varphi(x) = \int_{\inf J}^{x} \psi(t)\,dt$].

Sia ora $\psi_0 \in C_0^\infty(J)$ tale che $\int_J \psi_0\,dx = 1$. Se $\psi \in C_0^\infty(J)$ con $\int_J \psi\,dx = \lambda$, possiamo scrivere

$$\psi = [\psi - \lambda\psi_0] + \lambda\psi_0,$$

ove

$$\int_J [\psi - \lambda\psi_0]\,dx = \lambda - \lambda\int_J \psi_0\,dx = \lambda - \lambda = 0.$$

Dunque $\int_J f[\psi - \lambda\psi_0]\,dx = 0$ (per l'ipotesi). Perciò

$$\int_J f\psi\,dx = \int_J f[\psi - \lambda\psi_0]\,dx + \lambda\int_J f\psi_0\,dx = \lambda\int_J f\psi_0\,dx.$$

Posto $c = \int_J f\psi_0\,dx$, si ha dunque per ogni $\psi \in C_0^\infty(J)$,

$$\int_J (f - c)\psi\,dx = \int_J f\psi\,dx - c\lambda = 0,$$

e per il Lemma 2, $f = c$ q.o. in $J$. Poiché $J \subset\subset I$ è arbitrario, $f = c$ q.o. in $I$. $\square$

## Spazi di Sobolev, derivate forti e deboli.

Sia $1 \le p < \infty$, sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia $m \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$E^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega) : \ \|u\|_{m,p} = \left[ \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right]^{1/p} < \infty \right\};$$

lo spazio $E^{m,p}(\Omega)$ è normato con $\|\cdot\|_{m,p}$. Si noti che $\Omega$ non è necessariamente limitato.

**Definizione** Lo spazio di Sobolev $H^{m,p}(\Omega)$ è il completamento di $E^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$.

Dunque gli elementi di $H^{m,p}(\Omega)$ sono classi di equivalenza di successioni di Cauchy costituite da elementi di $E^{m,p}(\Omega)$.
Fortunatamente $H^{m,p}(\Omega)$ ha una caratterizzazione diretta, basata sulla nozione di derivata forte.

**Definizione** Sia $u \in L^p(\Omega)$. Diciamo che $u$ ha derivate forti in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine $m$, se esiste $\{u_k\} \subset E^{m,p}(\Omega)$ tale che $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\{D^\alpha u_k\}$ è una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \le m$. Le funzioni $u^\alpha = \lim_{k\to\infty} D^\alpha u_k$ sono le derivate forti di $u$ (esse non dipendono dalla scelta della successione approssimante

**Proposizione** $u \in H^{m,p}(\Omega) \iff u$ ha derivate forti in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine $m$.

dim Immediata conseguenza della definizione. $\square$

<u>Definizione</u> Sia $u \in L^p(\Omega)$. Diciamo che $u$ ha <u>derivate deboli</u> fino all'ordine $m$ se per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq m$ esiste $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Le funzioni $u^\alpha$ sono le <u>derivate deboli</u> di $u$

<u>Definizione</u> Lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni di $L^p(\Omega)$ che hanno derivate deboli in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine $m$.

<u>Proposizione 5.</u> $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_{m,p}$

<u>dim</u> Sia $\{u_n\} \subseteq W^{m,p}(\Omega)$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Allora, essendo $L^p(\Omega)$ completo, esiste $u \in L^p(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Inoltre per $|\alpha| \leq m$ esistono $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ tali che $D^\alpha u_n \to u^\alpha$ in $L^p(\Omega)$. Per ogni $n$ si ha, per definizione di derivate deboli,

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e per $n \to \infty$,

$$\int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e ciò prova che le $u^\alpha$ sono le $D^\alpha u$ deboli □

Osservazioni (1) $H^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$ e le derivate forti coincidono con le deboli. Infatti, se $u \in H^{m,p}(\Omega)$ con derivate forti $u^\alpha$, e $\{u_k\} \subseteq E^{m,p}(\Omega)$ è tale che $u_k \to u$ in $H^{m,p}(\Omega)$, allora integrando $|\alpha|$ volte per parti si ha

$$\int_\Omega D^\alpha u_k \cdot \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e per $k \to \infty$ si ottiene che $u$ ha derivate deboli $u^\alpha$.

(2) Le derivate deboli e forti sono uniche. Infatti, se $u$ ha $u^\alpha$ e $v^\alpha$ come derivate deboli di ordine $\alpha$, allora

$$\int_\Omega (u^\alpha - v^\alpha) \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \left[ \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx - \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx \right] = 0$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Per il lemma 2, si trova $u^\alpha = v^\alpha$.

Poiché le derivate forti sono anche deboli, dall'unicità di queste segue l'unicità di quelle.

(3) In realtà, con le definizioni che abbiamo dato, si può dimostrare che

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$$

Le cose sarebbero state diverse se avessimo definito (almeno per $\Omega$ limitato) $H^{m,p}(\Omega)$ come la chiusura di $C^m(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$: in tal caso avremmo avuto $H^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$