Funzioni di classe C^1, C^k, C^∞ su A.

Diciamo che $f \in C^1(A)$ se (i) $\exists\, D_i f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$, $i = 1 \dots N$,
(ii) le $D_i f$ sono continue in A.

La derivata seconda $D_i D_j f$ è (se esiste) $D_i [D_j f]$.

Diciamo che $f \in C^2(A)$ se (i) $\exists\, D_i D_j f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$, $i, j = 1 \dots N$,
(ii) le $D_i D_j f$ sono continue in A.

<u>Teorema</u> [di Schwarz] Se $f \in C^2(A)$, allora $D_i D_j f = D_j D_i f$ in A, cioè si può invertire l'ordine di derivazione. □

Diciamo che $f \in C^k(A)$ se esistono in A, e sono continue, tutte le derivate di f di ordine $\leq k$.

Diciamo che $f \in C^\infty(A)$ se esistono in A, e sono continue, le derivate di f di qualsiasi ordine.

<u>Esempi</u> (1) $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$: si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ poiché

$f_x(x,y) = 2x e^{x^2+2y^2}$, $f_y(x,y) = 4y e^{x^2+2y^2}$

$f_{xx}(x,y) = e^{x^2+2y^2}(2+4x^2)$, $f_{xy}(x,y) = 8xy e^{x^2+2y^2} = f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y) = e^{x^2+2y^2}(4+16y^2)$

e si capisce che possiamo derivare a volontà.

(2) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$: si ha $f \in C^2(\mathbb{R}^2) \setminus C^3(\mathbb{R}^2)$. Infatti

$f_x(x,y) = 3x\sqrt{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = 3y\sqrt{x^2+y^2}$,

$f_{xx}(x,y) = 3\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y) = 3\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, e queste funzioni sono continue (anche in $(0,0)$), ma si vede che f_{xx} e f_{yy} non sono derivabili in $(0,0)$.

(3) Analogamente, se $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{k+\frac{1}{2}}$, si ha $f \in C^k(\mathbb{R}^2) \setminus C^{k+1}(\mathbb{R}^2)$.

<u>Osservazione</u> Se $f \in C^2(A)$, la sua <u>matrice Hessiana</u>,

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(\underline{x}) & \cdots & D_1 D_N f(\underline{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_N D_1 f(\underline{x}) & \cdots & D_N D_N f(\underline{x}) \end{pmatrix},$$

è reale e simmetrica in virtù del teorema di Schwarz: dunque i suoi autovalori sono tutti reali.

Tutto ciò ha importanti applicazioni nel calcolo di massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili.

Prima però dobbiamo imparare a fare le derivate di funzioni composte: quindi, di funzioni della forma

$$f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)), \quad t \in [a,b],$$

ove $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, e $\alpha, \beta, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, tali che

$$(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \in A \quad \text{per ogni } t \in [a,b];$$

e naturalmente, α, β, γ, f sono funzioni di classe C^1.

Funzioni vettoriali di una variabile.

Consideriamo funzioni $\underline{u}: I$ intervallo $\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ $(N=2 \text{ o } N=3)$.

$\underline{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

è la traiettoria percorsa nello spazio da una zanzara, o da un uccello.

Oss. $\underline{u}$ è continua in un punto $t_0 \in I \iff x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)$ sono continue in t_0.

[Infatti $\quad \|\underline{u}(t) - \underline{u}(t_0)\| = \sqrt{|x(t)-x(t_0)|^2 + (y(t)-y(t_0)|^2 + |z(t)-z(t_0)|^2}$]

Oss. $\underline{u}$ è derivabile in $t_0 \iff x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)$ sono derivabili in t_0, e in tal caso

$$\underline{u}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \frac{\underline{u}(t) - \underline{u}(t_0)}{t - t_0}.$$

Regole di derivazione:

$$\frac{d}{dt}[\underline{u}(t) + \underline{v}(t)] = \underline{u}'(t) + \underline{v}'(t),$$

$$\frac{d}{dt}[\lambda(t)\, \underline{u}(t)] = \lambda'(t)\, \underline{u}(t) + \lambda(t)\, \underline{u}'(t),$$

$$\frac{d}{dt}\langle \underline{u}(t), \underline{v}(t) \rangle_N = \langle \underline{u}'(t), \underline{v}(t) \rangle_N + \langle \underline{u}(t), \underline{v}'(t) \rangle_N.$$

Derivazione di funzioni composte

Se $f(x,y,z)$ è di classe C^1 e $\underline{u}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ è di classe C^1, con $\underline{u}(t)=(a(t),b(t),c(t))$ si può considerare la funzione composta

$$[f\circ\underline{u}](t) := f(a(t),b(t),c(t)).$$

Essa è di classe C^1 e si ha

$$\frac{d}{dt}[f\circ\underline{u}](t)=\frac{d}{dt}f(\underline{u}(t))=\frac{d}{dt}f(a(t),b(t),c(t))=$$

$$=f_x(a(t),b(t),c(t))\,a'(t)+f_y(a(t),b(t),c(t))\,b'(t)+f_z(a(t),b(t),c(t))\,c'(t)=$$

$$=\langle\nabla f(\underline{u}(t)),\underline{u}'(t)\rangle_3.$$

Ancora più in generale:

se $f(x,y,z)$ è di classe C^1, e $\underline{u}(s,t)$ è una funzione vettoriale di classe C^1 da un aperto $A\subseteq\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^3$, con

$$\underline{u}(s,t)=(a(s,t),b(s,t),c(s,t)),$$

(per cui a,b,c sono funzioni di classe C^1), allora $f\circ\underline{u}$ è di classe C^1 in A, con

$$\frac{\partial}{\partial s}f(\underline{u}(s,t))=\langle\nabla f(\underline{u}(s,t)),\underline{u}_s(s,t)\rangle_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\underline{u}(s,t))=\langle\nabla f(\underline{u}(s,t)),\underline{u}_t(s,t)\rangle_3,$$

ove, naturalmente,

$$\underline{u}_s(s,t) = (a_s(s,t),\ b_s(s,t),\ c_s(s,t)),$$

$$\underline{u}_t(s,t) = (a_t(s,t),\ b_t(s,t),\ c_t(s,t)).$$

Queste formule sono importanti a livello teorico. A livello pratico si fa più velocemente il calcolo diretto.

<u>Esempio</u> (1) Deriviamo $f(\underline{u}(t))$, dove

$$f(x,y,z) = z e^{x+2y}, \qquad \underline{u}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t^2)$$

Allora

$$f(\underline{u}(t)) = t^2 e^{\cos t + 2\sin t},$$

$$\frac{d}{dt} f(\underline{u}(t)) = 2t\, e^{\cos t + 2\sin t} + t^2 e^{\cos t + 2\sin t}(-\sin t + 2\cos t).$$

(2) Deriviamo $f(\underline{u}(s,t))$, dove

$$f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2), \qquad \underline{u}(s,t) = (e^s,\ e^{t+s},\ e^{2t+s}).$$

Allora

$$f(\underline{u}(s,t)) = \ln\left(1 + e^{2s} + 2e^{2t+2s} + 3e^{4t+2s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\underline{u}(s,t)) = \frac{2e^{2s} + 4e^{2t+2s} + 6e^{4t+2s}}{1 + e^{2s} + 2e^{2t+2s} + 3e^{4t+2s}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\underline{u}(s,t)) = \frac{4e^{2t+2s} + 12e^{4t+2s}}{1 + e^{2s} + 2e^{2t+2s} + 3e^{4t+2s}}.$$

Esercizi

1) Sia $f(x,y) = y^4 e^{3x}$. Per quale versore $\underline{v}$ (cioè, $|\underline{v}|_2 = 1$) la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,-1)$ è massima, e per quale versore $\underline{v}$ è nulla?

2) Calcolare le derivate prime e seconde di $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+y}} - y\sqrt{1+x}$ nel punto $(0,0)$.

3) Calcolare le derivate prime e seconde di

$$f(x,y) = \ln(2x^2 - 3y^2), \qquad g(x,y) = x e^{xy}$$

4) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di

$$f(x,y) = e^{2x-y} + \sqrt{3+x^2+3y^2}$$

nel punto $(1,2,5)$, e calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$, con $\underline{v}$ versore orientato come la retta $y = \sqrt{3}\,x$ nel verso delle x decrescenti.

5) Stabilire per quale direzione $\underline{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ la funzione $f(x,y) = x^y - 2y + 2x$ ha, nel punto $(1,1)$, derivata direzionale uguale a 2. Qual è la direzione di massima crescita di f in $(1,1)$?

6) Sia $f(x,y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$. Trovare α tale che
(a) in $(0,1)$ la direzione di massima crescita sia lungo la parabola $y = (x+1)^2$ nel verso negativo delle x; oppure
(b) il piano tangente in $(0,1)$ sia perpendicolare alla retta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

Risolviamo i più difficili [5) e 6)].

5) Stabilire per quale direzione $\underline{v}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ la funzione $f(x,y)=x^y-2y+2x$ ha, nel punto $(1,1)$ derivata direzionale uguale a 2. Qual'è la direzione di massima crescita di f in $(1,1)$?

Calcoliamo $\nabla f(1,1)$: noto che $x^y=e^{y\ln x}$. Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{y\ln x}\cdot\frac{y}{x}+2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{y\ln x}\cdot\ln x-2,$$

da cui

$$\nabla f(1,1)=(1+2, 0-2)=(3,-2).$$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,1)=<\nabla f(1,1), \underline{v}>_2=3\cos\alpha-2\sin\alpha.$$

Perciò

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,1)=2 \iff 3\cos\alpha-2\sin\alpha=2.$$

Dunque

$$\sin\alpha=\frac{3}{2}\cos\alpha-1.$$

Allora

$$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\left(\frac{3}{2}\cos\alpha-1\right)^2=\frac{13}{4}\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1$$

cioè

$$\frac{13}{4}\cos^2\alpha-3\cos\alpha=0;$$

perciò $\cos\alpha=0$ oppure $\frac{13}{4}\cos\alpha-3=0$, ossia $\cos\alpha=\frac{12}{13}$.

Ne segue $\sin\alpha=\pm1$ oppure $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\pm\frac{5}{13}$.

Pertanto: $\underline{v}=(0,1), (0,-1), \left(\frac{12}{13}, \frac{-5}{13}\right), \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$.

la direzione di massima crescita si ha quando $\underline{v}$ è multiplo positivo di $\nabla f(1,1)$, ossia

$$\underline{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

6) Sia $f(x,y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$. Trovare α tale che

(a) in $(0,1)$ la direzione di massima crescita di f sia lungo la parabola $y = (x+1)^2$ nel verso negativo delle x, oppure

(b) il piano tangente in $(0,1)$ sia perpendicolare alla retta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$.

(a) Si ha $\nabla f(0,1) = \left(2x e^{x^2}(\alpha x - y^3) + \alpha e^{x^2}, -3y^2 e^{x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=1}} =$

$$= (\alpha, -3).$$

Inoltre la retta tangente alla parabola in $(0,1)$ è

$$y = 1 + 2x,$$

dunque il vettore tangente è $\underline{v} = (1,2)$. Si vuole che $\underline{v}$ sia multiplo negativo di $\nabla f(1,1)$. cioè si cerca $\lambda < 0$ tale che

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \cdot 1 \\ -3 = \lambda 2 \end{cases}$$

e si trova allora $\lambda = \alpha = -\frac{3}{2}$.

(b) Il piano tangente al grafico di f in $(0,1)$ è

$$z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\,(y-1),$$

cioè

$$z = -1 + \alpha x - 3(y-1), \quad \text{ovvero} \quad \alpha x - 3(y-1) - (z+1) = 0.$$

La retta

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z.$$

è parametrizzata da

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{x}{2} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

quindi ha vettore tangente $\underline{\tau} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Questo vettore deve essere perpendicolare al piano, dunque multiplo del vettore dei coefficienti $(\alpha, -3, -1)$. Perciò deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \\ -3 = \lambda \frac{3}{2} \\ -1 = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

e si trova $\lambda = \alpha = -2$.