3) L'opposto di un positivo è negativo; l'opposto di un negativo è positivo.

4) Il prodotto di due negativi è positivo. Infatti, se a, b sono negativi, allora $-a, -b$ sono positivi e $ab = (-a)(-b)$ è positivo.

5) Il prodotto di un negativo per un positivo è negativo. Infatti, se a è positivo e b è negativo, allora $-b$ è positivo, dunque $a(-b) = -ab$ è positivo e pertanto ab è negativo.

6) L'inverso di un positivo è positivo; l'inverso di un negativo è negativo.

<u>Notazione</u>
- Per dire "a positivo" si scrive $a > 0$,
- Per dire "a negativo" si scrive $a < 0$,

dunque

$$a > 0 \iff -a < 0.$$

- Per dire "a non negativo" si scrive $a \geq 0$,
- Per dire "a non positivo" si scrive $a \leq 0$,

dunque

$$a \geq 0 \iff -a \leq 0.$$

[Si legge "a maggiore di 0", "a minore di 0", "a maggiore o uguale a 0", "a minore o uguale a 0".]

<u>Notazione</u>:
- $a < b \iff b - a > 0 \iff a - b < 0$,
- $a \leq b \iff b - a \geq 0 \iff a - b \leq 0$.

Proposizione Se $a<b$ e $c>0$, allora $ac<bc$;
se $a<b$ e $c<0$, allora $ac>bc$.

dim Nel primo caso, $b-a, c>0 \Rightarrow (b-a)c = bc-ac>0$;
nel secondo, $a-b, c>0 \Rightarrow (a-b)c = ac-bc>0$.

Attenzione: Tutte le proprietà algebriche e di ordinamento valgono in $\mathbb{Q}$, insieme dei razionali. Qual'è allora la grande novità di $\mathbb{R}$?

Sono le proprietà di continuità che vedremo la prossima volta.

Esercizio Dati $a,b\in\mathbb{R}$, trovare $x\in\mathbb{R}$ tale che $ax=b$.

Ci sono 2 casi: se $a\neq 0$,

$$ax=b \longrightarrow \frac{1}{a}\cdot ax = \frac{1}{a}b \longrightarrow x=\frac{b}{a}.$$

Se $a=0$,

$0x=b$ <
- non ha soluzione se $b\neq 0$
- ha per soluzione ogni $x\in\mathbb{R}$ se $b=0$.

Osservazione Abbiamo tacitamente adottato la convenzione, di uso comune, di scrivere ab in luogo di $a\cdot b$.

Esercizio: risolvere la disequazione $\frac{3x-4}{2x+5} > 0$; vale a dire, determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che essa è vera.

Si ha $\frac{3x-4}{2x+5} > 0$ se e solo se il numeratore e il denominatore sono entrambi positivi o entrambi negativi. Dunque

$$\frac{3x-4}{2x+5} > 0 \iff \left[\begin{cases} 3x-4>0 \\ 2x+5>0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x-4<0 \\ 2x+5<0 \end{cases} \right].$$

Il primo sistema equivale a $x > \frac{4}{3}$ e $x > -\frac{5}{2}$, cioè $x > \frac{4}{3}$; il secondo equivale a $x < \frac{4}{3}$ e $x < -\frac{5}{2}$, cioè $x < -\frac{5}{2}$. Perciò

$$\frac{3x-4}{2x+5} > 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{4}{3}, \infty\right[.$$

Notazioni • $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $4 := 3+1$, $5 := 4+1$, $6 := 5+1$, $7 := 6+1$, $8 := 7+1$, $9 := 8+1$, $10 := 9+1$.

• $x^2 = x \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 = x^2 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, eccetera.

Si noti che $10 \neq 1 \cdot 0$. Una stringa di caratteri scelti in $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ad esempio 31045, rappresenta il numero reale $3 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10 + 5$.

Esercizio Dimostrare che $9999 = 10^4 - 1$.

$9999 = 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$, quindi $9999 + 1 = 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 10 =$

$= 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 10^2 = 9 \cdot 10^3 + 10^3 = 10 \cdot 10^3 = 10^4.$

Esercizio. Provare che $a^2 > a \ \forall a > 1$, $a^2 < a \ \forall a \in]0,1[$.

Assioma di continuità, o di completezza, o di Dedekind

Def. Se A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, essi si dicono *separati* se si ha $a \le b \ \forall a \in A, \forall b \in B$.

Es. $\{0\}$, $\mathbb{N}^+$; $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$; $[a,b]$, $[b,c]$.

Non sono separati $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Assioma Per ogni coppia di insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ separati, esiste almeno un elemento separatore $x \in \mathbb{R}$, ossia un numero reale x tale che

$$a \le x \le b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Sembra un enunciato innocuo, ma da esso segue tutta l'analisi reale: limiti, derivate, integrali, serie e applicazioni varie.

Es. $\{0\}$ e $\mathbb{N}^+$ hanno gli infiniti elementi separatori $x \in [0,1]$.

Idem per $]-\infty, 0]$ e $[1, \infty[$.

Invece $]-\infty, 0]$ e $[0, \infty[$ hanno l'unico elemento separatore $x = 0$.

Es. Siano $A = \{x \geq 0 : x^2 < a\}$, $B = \{x \geq 0 : x^2 > a\}$ ove a è un fissato numero > 0. Abbiamo:

- $A, B \neq \emptyset$ perché $0 \in A$, e inoltre:
$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow a \in B \text{ perché } a^2 > a \cdot 1 = a \\ a = 1 \Rightarrow 2 \in B \text{ perché } 2^2 = 4 > 1 \\ 0 < a < 1 \Rightarrow 1 \in B \text{ perché } 1^2 = 1 > a \end{cases}$$

- A, B separati perché se $x \in A$, $x' \in B$ si ha ...

se fosse $x' = x$, avremmo $x'^2 = x^2$, assurdo; se fosse $x' < x$, avremmo

$$a < x'^2 = x' \cdot x' \leq x' \cdot x \leq x \cdot x = x^2 < a \text{ (essendo } x', x \geq 0\text{)}, \text{ assurdo.}$$

• Chi è l'elemento separatore (o gli elementi separatori)?

Sia c un elemento separatore. Noto che $c > 0$ e che:

non può essere $c^2 > a$; infatti in tal caso considero $c - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ numero da scegliere; si ha

$$(c-\varepsilon)^2 = c^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon c > c^2 - 2\varepsilon c > a$$

pur di prendere $0 < \varepsilon < \frac{c^2 - a}{2c}$, ad esempio $\varepsilon = \frac{c^2 - a}{4c}$.

Dunque con questo ε si avrebbe $c - \varepsilon \in B$ e $c - \varepsilon < c$, assurdo!

Non può essere $c^2 < a$: infatti considero $c + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ da scegliere. Anzi, prendo $\varepsilon \in]0,1[$ da scegliere. Si ha allora

$$(c+\varepsilon)^2 = c^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon c < c^2 + \varepsilon + 2\varepsilon c < a$$

pur di prendere $0 < \varepsilon < \frac{a - c^2}{2c+1} \wedge 1$. [$p \wedge q$ significa $\min\{p,q\}$; $p \vee q$ significa $\max\{p,q\}$].

Con questo ε si ha $c + \varepsilon \in A$ e $c < c + \varepsilon$, assurdo!

Dunque vale $c^2 = a$. E allora scopro che c è unico: se $c' > 0$ verifica $c'^2 = a$, e $c < c'$ (ad esempio), allora

$$a = c^2 = cc < cc' < c'^2 = a, \text{ contraddizione. Quindi } c = c'. \ \square$$

<u>Corollario</u> Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\exists!\, x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tale che $x^2 = a$. Tale x si chiama <u>radice quadrata</u> di a e si scrive $x = \sqrt{a} = a^{1/2}$.