- Tutte le principali proprietà di $\mathbb{N}$:

  - $p+q,\ pq \in \mathbb{N}\ \forall p,q\in\mathbb{N}$

  [$A_q=\{p\in\mathbb{N}: p+q\in\mathbb{N}\}$ è induttivo $\forall q\in\mathbb{N}$; $B_q=\{p\in\mathbb{N}: pq\in\mathbb{N}\}$ è induttivo $\forall q\in\mathbb{N}$]

  - $p\in\mathbb{N},\ p\neq 0 \Rightarrow p-1\in\mathbb{N}$

    [$A=\{p\in\mathbb{N}: p-1\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ è induttivo]

  - $p,q\in\mathbb{N},\ p>q \Rightarrow p-q\in\mathbb{N}^+$

    [$A=\{p\in\mathbb{N}: p-q\in\mathbb{N}\ \forall q\in[0,p]\cap\mathbb{N}\}$ è induttivo

  - $]0,1[\cap\mathbb{N}=\emptyset$ [se $x\in]0,1[\cap\mathbb{N}$, $A=\mathbb{N}\setminus\{x\}$ è induttivo]

  - $]k,k+1[\cap\mathbb{N}=\emptyset\ \forall k\in\mathbb{N}$ [se $x\in]k,k+1[\cap\mathbb{N}$, $A=\mathbb{N}\setminus\{x\}$ è induttivo]

- Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo; ogni sottoinsieme non vuoto e limitato di $\mathbb{N}$ ha massimo.

  [Senza induzione: le due dim. sono uguali, si fa la 1ª: sia $A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{N}$: allora 0 è minorante di A. Sia $\ell=\inf A$. Dato $\varepsilon\in]0,1[$, $\exists\, n\in A$ tale che $\ell\le n<\ell+\varepsilon<\ell+1$. Se $n=\ell$, allora $\ell=\min A$ e abbiamo finito; se $\ell<n$, allora, per definizione di $\ell=\inf A$ esiste $m\in A$ tale che $\ell\le m<n$: ma allora $n-m\in\mathbb{N}$ e $n-m<\varepsilon+\ell-\ell=\varepsilon<1$, ossia $n-1<m<n$; assurdo]

- $2^n\le(n+1)!$ [induzione]. N.B. $2^n=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdots2}_{n}$, $(n+1)!=(n+1)n(n-1)\cdots2\cdot1$ (fattoriale).

• <u>Somme finite</u> Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (cioè una famiglia infinita di numeri reali $a_0, a_1, a_2, \dots$), definiamo

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1} & \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Chiaramente

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \text{; eccetera}$$

per il numero s_n si usa la notazione concisa

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

La variabile k è "muta", ossia s_n non dipende da k. Potremmo scrivere, senza cambiare nulla,

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{\circledast=0}^{n} a_{\circledast} .$$

Si noti che

$$\sum_{j=0}^{p} a_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n} a_j \quad \forall p \in \{0,1,\dots,n\}$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^+,$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n\in\mathbb{N}^+,$ (induzione)
- $\displaystyle\sum^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall q\neq 1$ (<u>progressione geometrica</u>)