Approssimazione decimale di un numero $x \in \mathbb{R}$.

(A) $x \geq 0$, (B) $x < 0$.

(A): definiamo $a_0 = [x]$ = parte intera di x = $\max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$.
e osserviamo che $a_0 \leq x < a_0 + 1$.

Poi definiamo $a_1 = [10(x - a_0)] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq 10(x - a_0)\}$,
e osserviamo che $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$

⋮

dopo il passo n-esimo ho costruito $a_0, a_1, \ldots, a_n$ con
$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n};$$

definiamo $a_{n+1} = \left[10^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right)\right] = \max\left\{n \in \mathbb{N} : n \leq 10^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right)\right\}$
e osserviamo che
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{k+1}}.$$

Naturalmente tutti gli a_n così costruiti dipendono da x.

<u>Proposizione</u> Se $x \geq 0$, e gli a_n sono quelli definiti sopra, posto $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ si ha $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

<u>dim</u>. Per costruzione, $x_n \leq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dunque x è un maggiorante degli x_n e perciò $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq x$.

D'altronde, sia $\varepsilon > 0$ e supponiamo che $n > \frac{1}{\varepsilon}$, cosicché $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
Allora, essendo $x < x_n + \frac{1}{10^n}$, si ha $x \leq x_n + \varepsilon \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n + \varepsilon$.
Poiché ε è arbitrario, ne segue $x \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, cioè la tesi. □

Calcolo combinatorio

Raggruppamenti: se A è un insieme di k elementi, B un insieme di n elementi, quanti sono gli insiemi ottenuti prendendo un elemento da A e uno da B? Sono kn.

Disposizioni semplici: se $k \leq n$, scegliamo con ordine e senza ripetizione k elementi da un insieme A con n elementi. In quanti modi si può fare la scelta? in $n(n-1)\dots(n-k+1)$ modi, ossia $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Disposizioni con ripetizione: se $k \leq n$, scegliamo con ordine e con ripetizione k elementi da un insieme A con n elementi. In quanti modi si può fare la scelta? In n^k modi.

Permutazioni semplici: sono disposizioni semplici nel caso $k=n$, cioè sono anagrammi di parole di n lettere tutte diverse. Quante sono? sono $n!$.

Permutazioni con ripetizione: sono anagrammi di parole con lettere ripetute. Se le lettere sono n, e h sono quelle ripetute, con la prima ripetuta k_1 volte, ..., la h-sima ripetuta k_h volte, quante sono le permutazioni con ripetizione? Sono $\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_h!}$ (coefficiente multinomiale).

Esempio: quanti sono gli anagrammi distinti di ACQUISTAPACE?
A → 3 ripetizioni; C → 2 ripetizioni; 12 lettere. Totale:

$$\frac{12!}{3!\,2!} = 11! = 39.916.800$$

Se $h=2$, si ha il coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Combinazioni semplici: È il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n elementi ($k \leq n$). Sono $\binom{n}{k}$. È come anagrammare una parola di n lettere che sono A (k volte) e B ($n-k$ volte).

Proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (*)$$

Da cui segue la regola del triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

----

in cui, al posto k-simo della riga n-sima ($n = 0, 1, 2, \dots$) c'è $\binom{n}{k}$, e ogni numero è la somma dei due che gli stanno sopra.

Dim. $(*)$: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\left[k + n-k+1\right] = \binom{n+1}{k}.$$

Formula di Newton per il binomio

Teo. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, sia $n \in \mathbb{N}^+$. Allora
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k};$$
la formula vale anche per $n=0$, purché $a+b \neq 0$.

dim. Sappiamo che vale
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq k > 0.$$

Ciò premesso, se $n=1$
$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = b+a = (a+b)^1.$$

Se la formula vale per n, la dimostriamo per $n+1$:
$$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n =$$
$$= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$
$$= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^h b^{n+1-h} =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h}\right] a^h b^{n+1-h} + a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1} =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h} + a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1} =$$
$$= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h}. \quad \square$$

Oss. Se $a=b=1$, la formula $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ elenca tutti i sottoinsiemi di un insieme con n elementi, che sono 2^n, raggruppandoli secondo il n° di elementi.