Serie

Una serie è una espressione della forma

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

ovvero una "somma infinita". Come darle senso? Così:

Definizione Sia $\{a_n\}$ una successione. Poniamo

$$\begin{cases} s_0 = a_0, \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

cosicché

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione $\{s_n\}$ si dice serie di termine generale a_n e si denota con Σa_n; i numeri s_n si chiamano somme parziali della serie.

Definizione Diciamo che la serie $\Sigma a_n = \{s_n\}$ converge al numero L, se $\exists \lim_{n \to \infty} s_n = L$. In tal caso L si dice somma della serie e si scrive

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Quindi, il simbolo Σa_n denota la serie (intesa come successione delle somme parziali, a prescindere dalla sua convergenza), mentre il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ indica la somma della serie (se essa è convergente).

<u>Definizione</u> Diciamo che la serie $\sum a_n = \{s_n\}$ <u>diverge positivamente</u> (o <u>negativamente</u>) se $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (o $-\infty$).
Se $\lim_{n\to\infty} s_n$ non esiste, diciamo che la serie $\sum a_n$ è <u>indeterminata</u>.

Quindi, una serie è una particolare successione. Ma il punto di vista si può anche capovolgere: ogni successione è una serie! Infatti, data una successione $\{b_n\}$, consideriamo

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_{n+1} = b_{n+1} - b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases};$$

allora si vede subito che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ossia

$$\{b_n\} = \sum a_n .$$

Insomma, serie e successioni sono esattamente la stessa cosa. Però, per le serie ci sono criteri di convergenza più comodi, e inoltre spesso si può provare che una serie converge senza saperne calcolare la somma, e questo rende le serie più maneggevoli delle successioni in molti contesti.

Esempi (1) serie geometrica di ragione q : $\sum q^n$, $q \in \mathbb{C}$.

Si ha
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{se } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases},$$

quindi la serie $\sum q^n$:

converge se $|q|<1$

diverge positivamente se $q \in \mathbb{R}$ e $q \geq 1$,

è indeterminata se $\begin{cases} q \in \mathbb{R}, \; q \leq -1, \\ q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \; |q| > 1. \end{cases}$

In particolare:

$$0.\overline{3} = 0.333\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right] = 3\left[\frac{10}{9} - 1\right] = \frac{1}{3},$$

$$0.\overline{9} = 0.999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right] = 9\left[\frac{10}{9} - 1\right] = 1,$$

$$0.42\overline{9} = 0.42999\ldots = \frac{42}{100} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{42}{100} + \frac{1}{1000}\,\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \frac{42}{100} + \frac{1}{100} = \frac{43}{100},$$

ossia

$$0.42\overline{9} = 0.43,$$

$$0.42\overline{37} = \frac{42}{100} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{37}{100^n} = \frac{42}{100} + \frac{37}{10000}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{42}{100} + \frac{37}{9900} = \frac{42 \cdot 99 + 37}{9900} =$$

$$= \frac{4200 - 42 + 37}{9900} = \frac{4237 - 42}{9900} = \frac{4195}{9900}.$$

2) <u>Serie di Mengoli</u> $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Si ha
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

<u>Oss.</u> Le serie che si decompongono nella forma

$$\sum a_n = \sum (b_n - b_{n+1})$$

(tutte si possono decomporre così, come abbiamo visto, ma qui si intende "in modo facile") si dicono <u>telescopiche</u>; in tal caso
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = b_0 - b_{n+1}$$
e dunque esse convergono se e solo se $\{b_n\}$ converge, e in tal caso
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3) <u>Serie armonica</u> $\sum \frac{1}{n}$.

Si chiama così perché ogni termine con $n>1$ è la <u>media armonica</u> del predecessore e del successore. Infatti [dati $a,b>0$, la loro media armonica è $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$]
$$\frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

La serie armonica, anche se sembra paradossale, <u>diverge positivamente</u>. Osserviamo che

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

è crescente. Inoltre quando $n = 2^m$ (potenza di 2) si può raccogliere:

$$s_n = s_{2^m} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}-1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \geq 1 + \frac{m}{2},$$

perché ciascun termine fra parentesi è $\geq \frac{1}{2}$. Quindi, dato $M > 0$, si ha per ogni $n \geq 2^m$

$$s_n \geq 1 + \frac{m}{2} \geq M \quad \text{purché} \quad m \geq 2(M-1).$$

Perciò $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Però la divergenza è molto lenta, visto che, essendo

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n} [\ln k - \ln(k-1)] =$$

$$= 1 + \ln n,$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1),$$

e dunque

$$\ln(n+1) < s_n < 1 + \ln n.$$

NB. Per provare la divergenza sarebbe bastato questo!

Quindi, affinché $s_n > 100$, occorre che

$$\ln(n+1) \geq 100,$$

cioè

$$n \geq e^{100} - 1.$$

<u>Osservazione</u>. Sia $\sum a_n$ convergente, con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$. Sottraendo s_N ad entrambi i membri, vale

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = L - s_N$$

La serie $\sum_{(n>N)} a_n$ si chiama <u>resto N-simo</u> della serie $\sum a_n$.

Esso converge se e solo se la serie converge; inoltre

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} (L - s_N) = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L.$$

Invece se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty,$$

allora $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = +\infty - s_N = +\infty \quad \forall N \in \mathbb{N}$,

e se $\sum a_n$ è indeterminata, tale è anche ogni resto N-simo.

<u>Proposizione</u> Se $\sum a_n$ è convergente, allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$.
Il viceversa è falso.

<u>dim</u>. Si ha $a_n = s_n - s_{n-1}$. Per $n \to \infty$, $s_n \to L$ e $s_{n-1} \to L$, quindi $a_n \to 0$. Viceversa, $\frac{1}{n} \to 0$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. $\square$

Oss. Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri non negativi, allora $\{s_n\}$, ove $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, è una successione crescente, visto che

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n .$$

Quindi essa ha sempre limite, finito o infinito. Ne segue che una serie a termini non negativi o converge o diverge positivamente.

Esempi (1) (serie armonica generalizzata) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \in \mathbb{R} \text{ se } \alpha > 1 \text{ (serie convergente)} \\ = +\infty \text{ se } 0 < \alpha \leq 1 \text{ (serie divergente positivamente)} \end{cases}$$

dim. Come per la serie armonica: se $n = 2^m$

$$s_{2^m-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \dots + \frac{1}{15^\alpha}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \dots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^\alpha} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k\alpha}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2^\alpha}} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha-1}$$

Poiché $\{s_n\}$ è crescente, dato n si ha $n \leq 2^n-1$ e dunque

$$s_n \leq s_{2^n-1} \leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Quindi la serie converge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha-1}$, $\forall \alpha > 1$.

Invece, se $0<\alpha\leq 1$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^+,$$

dunque

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \quad \square$$

(2) <u>Serie esponenziale</u> $\sum \frac{1}{n!}$.

Perché si chiama così? Lo vediamo fra poco. Intanto, essa converge perché $s_n \nearrow$ ed inoltre, per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leq 1+1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 3.$$

In effetti si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad \text{(da cui la denominazione)}$$

Infatti più, in generale, si prova che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ma per provarlo aspettiamo ancora un po'.

<u>Criteri di convergenza per serie a termini positivi</u>

Come sappiamo, le serie a termini positivi o convergono o divergono. Come distinguerle e riconoscerle?

1. <u>Criterio del confronto</u>: se $\sum a_n$, $\sum b_n$ sono serie a termini ≥ 0, e se risulta $a_n \leq b_n$ definitivamente, si ha:
   (a) se $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge;
   (b) se $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

<u>dim</u>. Siano $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Per ipotesi, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0 .$$

Dunque

$$s_n - s_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k = \sigma_n - \sigma_{n_0} \quad \forall n > n_0$$

Se $\sigma_n \to \sigma < \infty$, allora $s_n \leq \sigma + s_{n_0} - \sigma_{n_0}$ e quindi s_n converge. Se invece $s_n \to +\infty$, allora $\sigma_n \geq s_n - s_{n_0} + \sigma_{n_0}$ diverge per confronto. $\square$

<u>Esempio</u> $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ è convergente: infatti

$$\sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1,$$

e $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente perché $2 > 1$.

Invece $\sum \sin \frac{1}{n}$ è divergente: infatti, essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, si ha definitivamente $\sin \frac{1}{n} > (1-\varepsilon)\frac{1}{n}$, da cui la tesi essendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

2] . <u>Criterio del rapporto</u> Se $\sum a_n$ è una serie a termini definitivamente positivi, e se esiste $\lambda \in]0,1[$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda \text{ definitivamente,}$$

allora $\sum a_n$ è convergente.

<u>dim</u>. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ $\forall n \geq n_0$. Allora per $n > n_0$ possiamo scrivere

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} = a_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

dunque dall'ipotesi

$$a_n \leq a_{n_0} \lambda^{n-n_0} = \frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n .$$

Per confronto con la serie $\frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \sum \lambda^n$, che è convergente, si ha la tesi. $\square$

<u>Esempi</u> 1) $\sum \frac{n!}{n^n}$ è convergente: infatti

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} ;$$

dunque tale rapporto è definitivamente $< \frac{1}{e} + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente scelto. Se scelgo $\varepsilon < 1 - \frac{1}{e}$, ottengo

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{e} + \varepsilon =: \lambda \in]0,1[\text{ definitivamente.}$$

2) La serie $\sum \frac{1}{n}$, che è divergente, verifica

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ciò mostra che nell'ipotesi del criterio del rapporto non possiamo prendere $\lambda = 1$: ci vuole $0 < \lambda < 1$.

E comunque il criterio del rapporto non è sempre applicabile: la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ non ne verifica le ipotesi, pur essendo convergente: infatti

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$ non è definitivamente $\leq \lambda$ per nessun $\lambda < 1$.

3| La serie $\sum \frac{n^\alpha}{a^n}$ $(\alpha > 0, a > 1)$ è convergente: infatti

$$\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \Big/ \frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1.$$

Dunque, scelto $\varepsilon < 1 - \frac{1}{a}$, si ha

$$\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \Big/ \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{1}{a} + \varepsilon =: \lambda$$ definitivamente.

4| La serie $\sum \binom{n+k}{k}^{-1/k}$ $(k \in \mathbb{N})$ è a termini positivi, ma il criterio del rapporto è inefficace, poiché

$$\frac{\binom{n+1+k}{k}^{-1/k}}{\binom{n+k}{k}^{-1/k}} = \sqrt[k]{\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+1+k}{k}}} = \sqrt[k]{\frac{n+1}{n+1+k}} \to 1.$$

Tuttavia, se $k \geq 3$,

$$\sqrt{\frac{1}{\binom{n+k}{k}}} = \sqrt{\frac{n!\,k!}{(n+k)!}} \leq \sqrt{\frac{k!}{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)}} \leq \frac{\sqrt{k!}}{n^{3/2}},$$

quindi la serie converge per confronto con $\sqrt{k!}\sum n^{-3/2}$.

Se invece $k=2$

$$\sqrt{\frac{n!\,k!}{(n+k)!}} = \sqrt{\frac{2}{(n+2)(n+1)}} \geq \frac{\sqrt{2}}{n+2}$$

e la serie diverge per confronto con la serie armonica $\sqrt{2}\sum \frac{1}{n+2}$.

A maggior ragione per $k=0$ e $k=1$ la serie diverge.

3) **Criterio della radice** Se $\sum a_n$ è una serie a termini ≥ 0, e se esiste $\lambda \in]0,1[$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda \quad \text{definitivamente},$$

allora $\sum a_n$ converge. Se invece esistono infiniti valori di n per i quali $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, allora $\sum a_n$ diverge.

dim. Esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$ $\forall n \geq n_0$. Dunque

$$a_n \leq \lambda^n \quad \text{definitivamente},$$

quindi $\sum a_n$ converge per confronto con la serie $\sum \lambda^n$.
Se invece $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti indici, allora $\max\lim_{n\to\infty} a_n \geq 1$, dunque $a_n \not\to 0$ e la serie $\sum a_n$ deve divergere. $\square$

Esempi 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n - 2^n}$ è convergente poiché

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n-2^n}} = \frac{3}{4\sqrt[n]{1-2^{-n}}} \to \frac{3}{4};$$

quindi, scelto $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$, si ha definitivamente

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n-2^n}} < \frac{3}{4} + \varepsilon =: \lambda < 1.$$

Siccome la serie armonica (divergente) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ verifica

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

<u>non possiamo</u> indebolire l'ipotesi del criterio della radice prendendo $\lambda = 1$.

(2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ è convergente, perché

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \nearrow \frac{1}{e},$$

dunque $\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} \quad \forall n \geq 1$.

(3) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} - \cos\frac{n\pi}{2}\right)^n$ è a termini positivi. Si ha

$$\frac{3}{4} - \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 3/4 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ -1/4 & \text{se } n \text{ è multiplo di } 4 \\ 7/4 & \text{se } n \text{ è pari ma non è multiplo di } 4. \end{cases}$$

Perciò $\sqrt[n]{a_n} > 1$ per infiniti indici, e la serie diverge.