Criteri di convergenza per serie a termini di segno variabile

Def. Si dice che una serie $\sum a_n$ (reale o complessa) converge assolutamente, se
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Prop. Se $\sum a_n$ è una serie assolutamente convergente, allora essa è convergente e
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

dim. Supponiamo $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Ponendo $b_n = |a_n| - a_n$: si ha
$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|,$$
quindi, per confronto,
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$
D'altra parte, $a_n = |a_n| - b_n$, quindi
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k| - \sum_{k=0}^{n} b_k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{\infty} b_k \in \mathbb{R},$$
ossia
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$
In particolare, essendo
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{per subadditività,}$$
per $n \to \infty$
$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$
Sia ora $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Poiché $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}\, z| \leq z$, le 2 serie $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ e $\sum \mathrm{Im}\, a_n$

sono assolutamente convergenti; per quanto già dimostrato, $\sum \mathrm{Re}\, a_n$, $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ sono convergenti. Ne segue

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\, a_k + i \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\, a_k \to L \in \mathbb{C},$$

cioè $\sum a_n$ è convergente. La stima segue come prima. □

<u>Criterio di Leibniz</u> Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ decrescente e infinitesima. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente e vale la seguente stima del resto:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>dim</u>. Sia $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Allora

$$\begin{cases} s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \\ s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \\ s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0, \end{cases}$$

dunque

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \leq \dots \leq s_0,$$

ossia $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente mentre $\{s_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.
Siano $P = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$, $Q = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$: si ha $Q \leq P$, ma anche

$$P - Q \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0,$$

dunque $P = Q$, cioè l'intera successione $\{s_n\}$ converge a $S := P = Q$.
Infine

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| = |S - s_{n-1}|,$$

e si ha per ogni $m \in \mathbb{N}^+$

$$S_{2m-1} \leq S_{2m+1} \leq S \leq S_{2m} \leq S_{2m-2} \ ;$$

dunque se $n = 2m$ è pari

$$0 \leq S - S_{2m-1} \leq S_{2m} - S_{2m-1} = a_{2m} \leq a_{2m-1} \ ,$$

mentre se $n = 2m+1$ è dispari,

$$0 \geq S - S_{2m} \geq S_{2m+1} - S_{2m} = -a_{2m+1} \ ;$$

e quindi in ogni caso

$$|S - S_{n-1}| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n \ . \ \square$$

<u>Esempi</u> • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ed è un esempio di <u>serie convergente</u> che <u>non è</u> assolutamente convergente.

• $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^{100} 2^{-n}$ è convergente perché $n^{100} 2^{-n} \searrow$ (definitivamente) ed è infinitesima.

• $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n - n}{10^{n+1}}$ non converge, perché il termine generale $\not\to 0$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ converge assolutamente.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$ è convergente? Si ha $|a_n| = \frac{1}{n} \to 0$ e

$$S_{2m} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^m \left[\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}\right] = \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \left[\frac{1}{2h-1} + \frac{1}{2h}\right] ;$$

dunque per il criterio di Leibniz $\exists \lim_{m \to \infty} S_{2m} = L \in \mathbb{R}$. Ma allora $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} \to L + 0 = L$. Ne segue che $S_n \to L$ per $n \to \infty$, cioè la serie converge...

Esercizi $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n-100}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2+\sin n}$,

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$, $\sum (-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$, $\sum \frac{2+(-1)^n}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$,

$\sum \left(\sin(\sin n)\right)^n$, $\sum \left(\frac{\sin(n+1)}{n+1}\right)^n$.

Per quali x convergono e per quali x convergono assolutamente:

$\sum \frac{x^n}{n+1}$, $\sum x^n \sin\frac{1}{n}$, $\sum \frac{n}{n+1}(x-1)^n$, $\sum \frac{\sin^n x}{n}$,

$\sum (-2)^n e^{-nx}$, $\sum \frac{(\ln x)^n}{2\sqrt{n}}$, $\sum \frac{x^{1/n}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $\sum x^{-\sqrt{n}}$,

$\sum \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$, $\sum \frac{(n!)^3 x^{3n}}{n\,(3n)!}$, $\sum \frac{n^3(4x)^n}{2\sqrt{n!}}$, $\sum \sin\frac{3x}{n^2+1}$.

Oss. 1. Se $\{a_n\} \subset]0,\infty[$ e se $\max\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora $\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Il viceversa è falso. Dunque il criterio della radice è più potente di quello del rapporto.

Infatti: esiste $\delta>0$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1-\delta$ $\forall n \ge \nu$. Allora

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots\cdots \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\,a_\nu} \le (1-\delta)^{\frac{n-\nu}{n}}\sqrt[n]{a_\nu}, \qquad \forall n \ge \nu,$$

e per $n\to\infty$

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le 1-\delta.$$

Viceversa, sia
$$a_n=\begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ n\cdot 2^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari}; \end{cases}$$
allora
$$\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2},$$
ma
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari}, \end{cases} \quad \text{e } \max\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

Se, in particolare, esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=L$, allora dal conto precedente segue che esiste $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

<u>Oss. 2</u> Quanto fa $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$? Poiché $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$, e poiché
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$
dall'osservazione precedente segue
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$
Dunque, definitivamente,
$$\frac{n^n}{(e+\varepsilon)^n}\le n! \le \frac{n^n}{(e-\varepsilon)^n} \quad \text{(approssimazione più precisa di } n!\text{)}.$$

<u>Oss. 3.</u> Si ha $\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1$. Infatti $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$, da cui $e^{\frac{1}{n+1}}<1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$. Perciò $\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{n-1}$ $\forall n\ge 2$, cioè $1<\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}<\frac{n}{n-1}\to 1$. $\square$