<u>Esempio</u>: • $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$:

infatti $0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2}{x^2+y^2}[x^2+y^2] \le x^2+y^2 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$.

Dunque, scelto $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, se $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ si ha

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+2y^2}{2x^2+3y^2}$ non esiste: infatti se scelgo di tendere a $(0,0)$ lungo la retta $y=kx$, il [limite] è $\frac{3+2k^2}{2+3k^2}$, che dipende da k

<u>Limiti destri e sinistri (in $\mathbb{R}$).</u>

<u>Definizione</u> Sia $N=1$, sia $A=[a,b]$, sia $x_0 \in]a,b[$. Scrivo

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \qquad \left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\right]$$

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ tale che

$$|f(x)-L| < \varepsilon \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[\qquad \left[|f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall x\in]x_0, x_0+\delta[\right].$$

Definizioni analoghe per $L = \pm\infty$.

<u>Esempio</u>: $\lim_{x\to n^-} [x] = n-1$, $\lim_{x\to n^+} [x] = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Osservazione</u>: se $N=1$ e se x_0 è punto d'accumulazione per $A\cap]-\infty, x_0[$ e per $A \cap]x_0, +\infty[$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Definizione Sia $N=1$, sia $A=[a,+\infty[$. Scrivo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \quad \text{se } \forall\varepsilon>0\ \exists B>0 \text{ tale che}$$

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall x>B.$$

Definizioni analoghe per $L=\pm\infty$. Se invece $A=]-\infty,b]$, scrivo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \quad \text{se } \forall\varepsilon>0\ \exists B>0 \text{ tale che}$$

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall x\leq -B.$$

Definizioni analoghe per $L=\pm\infty$.

Esempi. $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a>1. \end{cases}$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<a<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } a>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ -\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$, $\lim_{x\to0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & \text{se } b>1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$

Esercizio Provare che $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0 \ \forall\alpha>0$.

[Verificare successivamente che

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\alpha} x^\alpha \ln x^\alpha = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{\alpha}\, t\ln t = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-y} y = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{y}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}} \leq$$

$$\leq \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{y}{1+y+\frac{y^2}{2}} \leq \frac{2}{\alpha} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0.]$$

Primo compitino del 2016-17

Es. 1 $\quad |iz|^5 + i\,|z|\,\bar{z}\,(1+i)^2 = 0 \quad$ per quali $z \in \mathbb{C}$ è vero?

Es. 2 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha + \ln(5^n - 1)} \quad$ per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste?

Es. 3 $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n^2+1}(2x)^{4n} - \frac{1}{n}(4x)^{2n}\right] \quad$ per quali $x \in \mathbb{R}$ converge?

Le soluzioni sono scritte nelle mie pagine: Compitini di Analisi 1, testo e risoluzione.