ANALISI 1 | gi 28/3/19

Formula di Taylor

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione; sia $x_0 \in]a,b[$.
Se f è continua in x_0, sappiamo che

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Se f è derivabile in x_0, sappiamo che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Vogliamo generalizzare questo fenomeno, passando ad approssimazioni polinomiali di grado k nel caso di funzioni derivabili k volte.

Teorema (Formula di Taylor) Sia $f \in C^{k-1}(a,b)$, e supponiamo che f abbia la derivata k-sima nel punto $x_0 \in]a,b[$. Allora esiste un unico polinomio $P_{k,x_0}(x)$, di grado $\leq k$, tale che

$$f(x) - P_{k,x_0}(x) = o((x-x_0)^k) \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Tale polinomio è

$$P_{k,x_0}(x) = \sum_{h=0}^{k} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h \quad , \quad x \in \mathbb{R};$$

esso si chiama <u>k-simo polinomio di Taylor di f in x_0</u>.

dim. Se $k=0$, cioè f è solo continua in x_0, allora deve essere per forza

$$P_{0,x_0}(x) = f(x_0).$$

Supponiamo dunque $k \geq 1$.

Sia $P(x) = \sum_{h=0}^{k} a_h (x-x_0)^h$ un generico polinomio di grado $\leq k$ (si noti che ogni polinomio può essere scritto centrato in x_0).

Poniamo $g(x) = f(x) - P(x)$: vorremmo che P fosse tale che

$$g(x) = o((x-x_0)^k) \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Questo si può ottenere in un solo modo, descritto dal lemma che segue.

<u>Lemma</u> Sia $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile $k-1$ volte, e tale che esista $g^{(k)}(x_0)$. Si ha $g(x) = o((x-x_0)^k)$ per $x \to x_0$ se e solo se

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(k)}(x_0) = 0 .$$

<u>dim</u> ($\Leftarrow$) Usando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital,

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^k} \simeq \frac{g'(x)}{k(x-x_0)^{k-1}} \simeq \dots \simeq \frac{g^{(k-1)}(x)}{k!\,(x-x_0)} =$$

$$= \frac{g^{(k-1)}(x) - g^{(k-1)}(x_0)}{k!\,(x-x_0)} \longrightarrow \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} = 0 \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Pertanto $g(x) = o((x-x_0)^k)$ per $x \to x_0$.

($\Rightarrow$) Sia $g(x)$ infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^k$ per $x \to x_0$. Definiamo

$$Z=\{h\in\mathbb{N}:\ g^{(h)}(x_0)\neq 0,\quad 0\leq h\leq k\}.$$

Notiamo che $0\notin Z$: infatti altrimenti avremmo $g(x_0)\neq 0$, da cui

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^k}\to\frac{g(x_0)}{0^\pm}=\pm\infty\quad\text{per } x\to x_0,$$

che contraddice l'ipotesi.

Sia $p=\min Z$; quindi $1\leq p\leq k$. Per definizione di p,

$$g(x_0)=\cdots=g^{(p-1)}(x_0)=0,\quad g^{(p)}(x_0)\neq 0.$$

Applichiamo il teorema di de l'Hôpital alla forma indeterminata

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^p}$$

(anche se sappiamo, per ipotesi, che tale limite vale 0). Si ha

$$0\leftarrow\frac{g(x)}{(x-x_0)^p}\simeq\frac{g'(x)}{p(x-x_0)^{p-1}}\simeq\cdots\simeq\frac{g^{(p-1)}(x)}{p!\,(x-x_0)}=$$

$$=\frac{g^{(p-1)}(x)-g^{(p-1)}(x_0)}{p!\,(x-x_0)}\longrightarrow\frac{g^{(p)}(x_0)}{p!}\neq 0\quad\text{per } x\to x_0,$$

e questo è assurdo: vuol dire che Z è vuoto, dato che $p=\min Z$ non esiste. Ciò significa che $g(x_0)=g'(x_0)=\cdots=g^{(p)}(x_0)=0$. $\square$

Se adesso applichiamo il lemma alla funzione

$$g(x)=f(x)-P(x),$$

avremo che $f(x)-P(x)=o((x-x_0)^k)$ se e solo se

$$\begin{cases} f(x_0) = P(x_0) = a_0, \\ f'(x_0) = P'(x_0) = a_1 \\ f''(x_0) = P''(x_0) = 2a_2, \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0) = k!\, a_k \end{cases},$$

cioè se e solo se

$$a_h = \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}, \qquad 0 \le h \le k.$$

Dunque $f(x) - P(x) = o((x-x_0)^k)$ se e solo se

$$P(x) = P_{k,x_0}(x) = \sum_{h=0}^{k} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h.$$

Ciò mostra anche che P_{k,x_0} è l'unico polinomio che ha la proprietà di essere vicino a f per $x \to x_0$ più di $(x-x_0)^k$. □

Osservazioni (1) Il grado di P_{k,x_0} è esattamente k se e solo se $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

(2) Se $f \in C^k(a,b)$ ed esiste $f^{(k+1)}(x_0)$, allora

$$P_{k+1,x_0}(x) = P_{k,x_0}(x) + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}.$$

(3) Se f è derivabile k volte in $]a,b[$, allora vale un "teorema di Lagrange di ordine k", cioè esiste ξ, intermedio

fra x e x_0, tale che

$$f(x) - P_{k-1,x_0}(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Per provarlo, osservato che risulta $f^{(h)}(x_0) = P^{(h)}_{k-1,x_0}(x_0)$ per $h=0,1,\dots,k-1$, applichiamo ripetutamente il teorema di Cauchy al rapporto

$$\frac{f(x)-P_{k-1,x_0}(x)}{(x-x_0)^k} ;$$

si ottiene

$$\frac{f(x)-P_{k-1,x_0}(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f'(\xi_1)-P'_{k-1,x_0}(\xi_1)}{k(\xi_1-x_0)^{k-1}} = \frac{f''(\xi_2)-P''_{k-1,x_0}(\xi_2)}{k(k-1)(\xi_2-x_0)^{k-2}} = \cdots$$

$$\cdots\cdots = \frac{f^{(k)}(\xi_n)}{k!},$$

ove, per $1\leq h\leq n$, il punto ξ_h è intermedio fra ξ_{h-1} e x_0 (e $\xi_0=x$).

(4) Posto $f(x)=\sin x^5$, chi sono i $P_{k,0}(x)$? Poichè

$$\sin x^5 = x^5 - \frac{x^{15}}{6} + o(x^{15}),$$

avremo, per unicità,

$$P_{k,0}(x)\equiv 0 , \quad k=0,1,2,3,4;$$

$$P_{k,0}(x)= x^5 , \quad k=5,6,7,8,9,10,11,12,13,14$$

$$P_{k,0}(x)= x^5-\frac{x^{15}}{6} , \quad k=15 \ \dots$$

eccetera.

(5) Se f è un polinomio,

$$f(x) = \sum_{h=0}^{m} a_h x^h, \quad x \in \mathbb{R},$$

allora

$$P_{k,0}(x) = \sum_{h=0}^{k} a_h x^h \qquad \text{se } k < m,$$

$$P_{k,0}(x) = \sum_{h=0}^{m} a_h x^h = f(x) \qquad \text{se } k \geq m.$$

(6) Se f è somma di una serie di potenze,

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad |x| < R,$$

allora

$$P_{k,0}(x) = \sum_{h=0}^{k} a_h x^h \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

LISTA DEI PIÙ NOTI SVILUPPI DI TAYLOR $(x \to 0)$

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$,
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$,
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{2040} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$,
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$,
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots + \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$,
- $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$,

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$,
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$,
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

Inoltre, essendo

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}, \quad |x|<1,$$

si ha

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

e in particolare, per $x \to 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2});$$

Esercizi

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x - x^2}{x^4}$,
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2 x} - \sqrt{1+x^2}}{\sin x^4}$,
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{\sqrt[4]{1+5x} - \sqrt[5]{1+6x}}$,
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$,
- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cosh\sqrt{x} - \sqrt{\cosh x}}{x^2}$,

- $\lim_{x\to +\infty} \left[-2x^2 + x^3 \ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)\right]$,

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left[\frac{\sinh x}{x} - \frac{x}{\sinh x}\right]$,

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{(5^x - 2^x)\sin x}{\sin x + \ln(1-x)}$,

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^5}{\left(\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$,

- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\,\mathrm{tg}\,x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cosh^2 x - 1 - x^2}{x^4}$,

- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{x}} - 1}{\ln x^x}$, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^{-x} - 1}{\ln x^x}$,

- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 x + 3(x - \sin^2\sqrt{x})}{x^2}$,

- $\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + 1} - x\right]$,

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{1-x} + e^x\right)^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x^3}$.