Esercizi | ANALISI 1 | gi 4|4|14 |

- Sia $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}-1}{x^2}$. La f è pari, definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \quad \text{(asintoto orizzontale)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \text{(asintoto verticale)}$$

Inoltre $f(1)=0$. Calcoliamo f' per $x>0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}x^2 - (\sqrt{x}-1)2x}{x^4} = \frac{x^2-4x^2+4x\sqrt{x}}{2x^4\sqrt{x}} = \frac{-3\sqrt{x}+4}{2x^3} \geq 0$$

$$\iff 3\sqrt{x} \leq 4, \iff 0 < x \leq \frac{16}{9}.$$

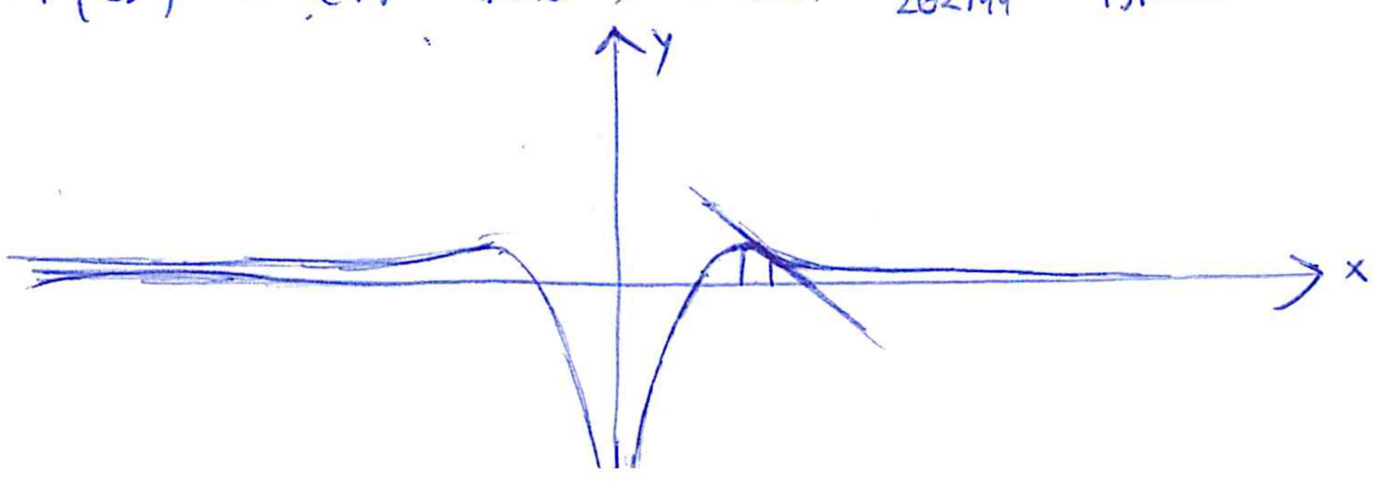
Dunque f ha massimo relativo (e assoluto) in $\frac{16}{9}$, con $f\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{3}{16}$.

La derivata seconda è (per $x>0$)

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{2x^{5/2}} + \frac{2}{x^3}\right] = +\frac{15}{4x^{7/2}} - \frac{6}{x^4} = \frac{15\sqrt{x}-24}{4x^4} \geq 0$$

$$\iff \sqrt{x} \geq \frac{24}{15} \iff x \geq \left(\frac{24}{15}\right)^2 = \frac{64}{25}.$$

Quindi f' decresce (f è concava) in $]1, \frac{64}{25}]$ e f' cresce (f è convessa) in $[\frac{64}{25}, +\infty[$. Dunque $\frac{64}{25}$ è punto di flesso, con $f\left(\frac{64}{25}\right) = \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{25}{64}\right)^2 = \frac{375}{4096}$, $f'\left(\frac{64}{25}\right) = \frac{-8750}{262144} = \frac{-4375}{131072}$.



- Dimostrare che $2\sin x + \operatorname{tg} x > 3x \quad \forall x \in]0, \pi/2[$.

Sia $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x$. Allora $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = 2\cos x + 1 + \operatorname{tg}^2 x - 3 = 2(\cos x - 1) + \operatorname{tg}^2 x .$$

Si ha, per ogni $x \in]0, \pi/2[$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

e la serie ha segni alterni e, almeno per $n \geq 1$, termini decrescenti in modulo, dato che

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{x^{2n}}{(2n)!} \iff x^2 < (2n+2)(2n+1)$$

e ciò è vero perché

$$x^2 < \frac{\pi^2}{4} < (2\cdot 1 + 2)(2 \cdot 1 + 1) = 12 .$$

Dunque

$$\cos x - 1 > -\frac{x^2}{2} \quad \forall x \in]0, \pi/2[,$$

e perciò

$$f'(x) > -x^2 + \operatorname{tg}^2 x > 0 \quad \forall x \in]0, \pi/2[,$$

da cui $f(x) > 0$ in $]0, \frac{\pi}{2}[$.

- $f(x,y,z) = \cos(x^2 - z^2) \ln(1 + yz)$

(i) è differenziabile? dove è definita?

(ii) scrivere f_x, f_y, f_z;

(iii) calcolare $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,1,1)$, ove $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(iv) equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f in $(1,-1,-1, \ln 2)$.

Facsimile del 2° compitino

Esercizio 1 Per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \sin(\alpha x + y^2)$ ha piano tangente al grafico in $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ parallelo alla retta definita dalle equazioni $x = y = 2z$? Esiste anche $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il piano sia perpendicolare a tale retta?

Esercizio 1 bis La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{se } x = -y \end{cases}$$

è continua? Se no, in quali punti è discontinua?

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x+2} \right].$$

Esercizio 2 bis Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17} - 2}.$$

Esercizio 3 Tracciare un grafico approssimativo di

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Esercizio 3 bis Dimostrare che

$$\frac{2x}{2-x^2} > \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \left]0, \sqrt{2}\right[.$$

Risoluzione.

Esercizio 1 Si ha $f(0,\sqrt{\pi})=0$,

$$f_x(x,y)=\alpha\cos(\alpha x+y^2),\quad f_y(x,y)=2y\cos(\alpha x+y^2)$$

$$f_x(0,\sqrt{\pi})=-\alpha,\qquad f_y(0,\sqrt{\pi})=-2\sqrt{\pi}.$$

Quindi il piano tangente al grafico in $(0,\sqrt{\pi},0)$ ha equazione

$$z=-\alpha x-2\sqrt{\pi}(y-\sqrt{\pi})$$

cioè

$$\alpha x+2\sqrt{\pi}\,y+z-2\pi=0.$$

Il vettore $(\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1)$ è perpendicolare al piano.
La retta descritta da $x=y=2z$ si scrive, in forma parametrica, scegliendo $z=t$, come

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R},$$

quindi si tratta della retta passante per l'origine, con direzione $(2,2,1)$. Il piano è parallelo alla retta se e solo se

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ 2\sqrt{\pi}\\ 1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

cioè se e solo se

$$2\alpha+4\sqrt{\pi}+1=0,$$

cioè se e solo se

$$\alpha=\frac{-1-4\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il piano è ortogonale alla retta se e solo se $\begin{pmatrix}\alpha\\ 2\sqrt{\pi}\\ 1\end{pmatrix}$ è parallelo a $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, ossia esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$\begin{cases} \alpha = 2\lambda \\ 2\sqrt{11} = 2\lambda \\ 1 = \lambda \end{cases},$$

ma la terza e seconda equazione sono incompatibili: quindi il piano non è mai ortogonale alla retta.

Esercizio 1 bis Se $(x,y) \to (0,0)$, vediamo che $f(x,y)$ non ha limite: infatti con $y = x \to 0$ si ha $f(x,x) = \frac{x^6}{2x^3} \to 0$, mentre con $y^3 = -x^3 + x^6$, ossia $y = \sqrt[3]{-x^3+x^6}$, si ha $f(x,y) = \frac{-x^6+x^9}{x^6} = -1+x^3 \to -1$.
Dunque f non è continua su $\mathbb{R}^2$. Essa è però continua in tutti i punti (x_0,y_0) con $x_0 \neq -y_0$. Si ha discontinuità in ogni punto $(x_0,-x_0)$: infatti, con $y = x-2x_0$, per $x \to x_0$ si trova

$$f(x, x-2x_0) = \frac{x^3(x-2x_0)^3}{x^3+(x-2x_0)^3},$$

e dunque

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x, x-2x_0) = \frac{-x_0^6}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x, x-2x_0) = \frac{-x_0^6}{0^-} = +\infty.$$

Esercizio 2 Si ha $\frac{x^3}{3x^2-4} \simeq \frac{x}{3}$, $\frac{x^2}{3x+2} \simeq \frac{x}{3}$ per $x \to \pm\infty$.
Dunque si tratta di una forma indeterminata $\pm(+\infty-\infty)$. Scrivendo

$$\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} = \frac{x^3(3x+2) - x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)} =$$

$$= \frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8} = \frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8},$$

si trova subito

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right] = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 2bis Si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2} = \text{(usando il teorema di de l'Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{1}{\frac{1}{4}(x+17)^{-3/4}} = \lim_{x\to -1} 4(x+17)^{+3/4} = 32.$$

Esercizio 3 La funzione f è definita in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\left(-1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{-1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \text{(con il teorema di de l'Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{3}x^{-2/3}}{-\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{2/3}}{x^{2/3}} = 0^+.$$

La funzione f è sempre positiva (tocca l'asse x in $x=1$ se la prolunghiamo a $\mathbb{R}$ per continuità ponendo $f(1)=0$); si ha anche $f(0)=1$. Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{1/3} + (1-x^{1/3})\frac{1}{3}(1-x)^{-4/3}}{(1-x)^{2/3}} =$$

$$= \frac{-(1-x)+(1-x^{1/3})\,x^{2/3}}{3(1-x)^{4/3}\,x^{2/3}} = \frac{x^{2/3}-1}{3(1-x)^{4/3}\,x^{2/3}}.$$

Notiamo che $f'(0) = -\infty$ (la pendenza è verticale). Poi,

$$f'(x) > 0 \iff x^{2/3}-1>0 \iff x^2>1 \iff$$

$$x>1 \text{ oppure } x<-1.$$

In particolare $x=-1$ è punto di massimo locale e $x=1$ è punto di minimo locale (anche se lì il prolungamento di f non è derivabile). Si ha $f(-1) = \frac{1+1}{\sqrt[3]{1+1}} = 2^{2/3}$, e (come si sa) $f(1)=0$.

Proviamo a calcolare $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}\left[3(1-x)^{4/3}x^{2/3}\right] - (x^{2/3}-1)\left[-4(1-x)^{1/3}x^{2/3} + 2(1-x)^{4/3}x^{-1/3}\right]}{9(1-x)^{8/3}\,x^{4/3}}$$

$$= \frac{2x^{2/3}(1-x)+4(x^{2/3}-1)\,x-2(x^{2/3}-1)(1-x)}{9(1-x)^{7/3}\,x^{5/3}} =$$

$$= \frac{2}{9}\,\frac{x^{2/3}-x^{5/3}+2x^{5/3}-2x-x^{2/3}+x^{5/3}+1-x}{(1-x)^{7/3}\,x^{5/3}} =$$

$$= \frac{2}{9}\,\frac{2x^{5/3}-3x+1}{(1-x)^{7/3}\,x^{5/3}}.$$

Non si riescono a calcolare i punti di flesso: però si vede che:

- per $x>1$, è $f''(x)<0$: infatti il denominatore è negativo, mentre il numeratore $2x^{5/3}-3x+1 =: h(x)$ è positivo, poiché

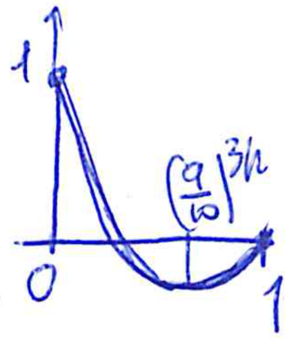
$$h(1)=0,$$

$$h'(x)=\frac{10}{3}x^{2/3}-3 > \frac{10}{3}-3=\frac{1}{3} \quad \forall x>1.$$

- In $]0,1[$ c'è un unico punto di flesso: infatti se $x\in]0,1[$ il denominatore è positivo, mentre $h(x)$ cambia segno: infatti $h(0)=1$, $h'(0)=-3$, $h(1)=0$, $h'(1)=\frac{1}{3}$, e in $]0,1[$ si ha $h'(x)=\frac{10}{3}x^{2/3}-3<0 \iff 0<x<\left(\frac{9}{10}\right)^{3/2}$.

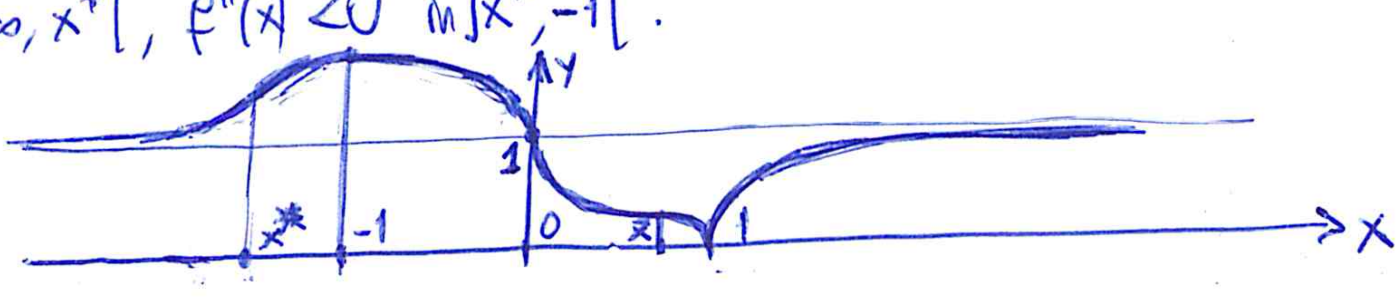
Quindi $h\left(\left(\frac{9}{10}\right)^{3/2}\right)<0$,

e dunque $h(\bar{x})=0$ in un unico $\bar{x}\in]0,\left(\frac{9}{10}\right)^{3/2}[$.



Si ha $f''(\bar{x})=0$ e $f''(x)<0$ in $]\bar{x},1[$, $f''(x)>0$ in $]0,\bar{x}[$.

- in $]-\infty,-1[$ c'è un unico punto di flesso: infatti se $x<-1$ il denominatore è negativo, mentre $h(x)$ cambia segno poiché $h(-\infty)=-\infty$, $h(-1)=2$, e nella semiretta $]-\infty,-1[$ si ha $h'(x)>0 \iff x<-\left(\frac{9}{10}\right)^{3/2}$. Dunque $h\left(-\left(\frac{9}{10}\right)^{3/2}\right)>0$, per cui $h(x^*)=0$ in un unico $x^*\in]-\infty,-\left(\frac{9}{10}\right)^{3/2}[$. Si ha $f''(x^*)=0$ e $f''(x)>0$ in $]-\infty,x^*[$, $f''(x)<0$ in $]x^*,-1[$.



Esercizio 3 bis Scriviamo la disuguaglianza nella forma

$$(2-x^2)\,\mathrm{tg}\,x - 2x < 0 \quad \forall x \in]0,\sqrt{2}[\,,$$

o anche

$$(2-x^2)\sin x - 2x\cos x < 0 \quad \forall x \in]0,\sqrt{2}[\,.$$

Poniamo

$$g(x) = (2-x^2)\sin x - 2x\cos x\,.$$

Si ha $g(0)=0$

$$g'(x) = -2x\sin x + (2-x^2)\cos x - 2\cos x + 2x\sin x =$$

$$= -x^2\cos x\,.$$

Dunque g decresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, ed essendo $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ si ha $g(x)<0$ in $]0,\sqrt{2}[$, come richiesto.

Altro esercizio. Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\neq 0\,. \end{cases}$ Provare che:

(i) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,
(ii) $f^{(k)}(0)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$.
(iii) nessuna serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ può avere come somma $f(x)$ in alcun intervallo $]-R,R[$.

• Sia
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Allora:

(i) $f\in C^\infty(\mathbb{R})$,

(ii) $f^{(k)}(0)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$,

(iii) Non esiste alcuna serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ che abbia per somma $f(x)$ in un opportuno intervallo $]-R,R[$.

dim. Si ha
$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x)=\left(\frac{-6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \ \ldots\ldots$$

Si verifica agevolmente che per ogni $k\in\mathbb{N}^+$ la $f^{(k)}$ è data da
$e^{-\frac{1}{x^2}}\sum_{h=1}^{m_k}\frac{c_k}{x^{n_k}}$, ove $c_k\in\mathbb{R}$, $m_k\in\mathbb{N}^+$, $n_k\in\mathbb{N}^+$; basta usare l'induzione: se $f^{(k)}$ è di questa forma, allora $f^{(k+1)}$ è ancora di questa forma:
$$f^{(k+1)}=e^{-\frac{1}{x^2}}\left[\frac{2}{x^3}\sum_{h=1}^{m_k}\frac{c_k}{x^{n_k}}-\sum_{h=1}^{m_k}\frac{n_k c_k}{x^{n_k+1}}\right].$$

Allora è chiaro che, per ogni $k\in\mathbb{N}$,
$$\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)=\lim_{t\to\infty} e^{-t^2}\sum_{h=1}^{m_k} c_k t^{n_k}=0.$$

Dunque $f^{(k)}(0)=0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$. Se avessimo $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ in $]-R,R[$, per il principio di identità delle serie di potenze avremmo $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=0$, ossia $f(x)=0$. Ma $f(x)>0$ per ogni $x\neq 0$: assurdo.