Metodi di integrazione

A. Integrazione per parti Siano $f, g \in C^1[a,b]$. Poichè

$$D(fg)(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$$

si ricava, integrando e usando il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Questa è la formula dell'integrazione per parti: semplicemente, un integrale è trasformato in un altro, sperabilmente più semplice.

Esempi:

1. $$\int_a^b \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\ \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\sin x}\,dx = \Big[-x\cos x\Big]_a^b + \int_a^b \cos x\,dx = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_a^b.$$

2. $$\int_a^b \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\ \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\cos x}\,dx = \Big[x\sin x\Big]_a^b - \int_a^b \sin x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_a^b.$$

3. $$\int_a^b \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{e^x}\ \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\cos x}\,dx = \Big[e^x \sin x\Big]_a^b - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{e^x}\ \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{\sin x}\,dx =$$

$$= \Big[e^x \sin x + e^x \cos x\Big]_a^b - \int_a^b e^x \cos x\,dx.$$

Riportiamo a primo membro $\int_a^b e^x \cos x\,dx$ e troviamo

$$2\int_a^b e^x \cos x = \left[e^x(\sin x + \cos x)\right]_a^b,$$

e perciò

$$\int_a^b e^x \cos x = \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x+\cos x)\right]_a^b.$$

Di passaggio ricaviamo anche

$$\int_a^b e^x \sin x\,dx = \int_a^b e^x \cos x\,dx - \left[e^x \sin x\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x(\cos x - \sin x)\right]_a^b.$$

4. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{1}\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \cancel{\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1} + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

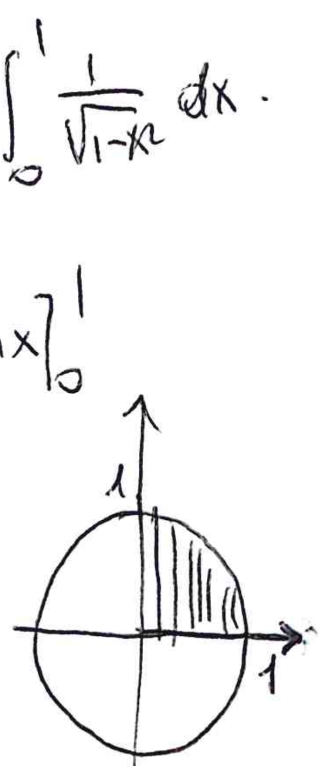
Dunque

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_0^1$$

e infine

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{4},$$

come era prevedibile (v. figura).



<u>Esercizi vari:</u> • $\int_1^e \sqrt{x}\ln x\,dx$, • $\int_{1/2}^1 x\ln^2 x\,dx$,

- $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{3x-1}\,dx$, • $\displaystyle\int_1^2 (x-1)e^{-x}\ln x\,dx$,

- $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx$, • $\displaystyle\int_0^1 \sinh^2 x\,dx$,

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$, • $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$, • $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^2 x\,dx$

- $\displaystyle\int_{-4}^{11} |x|\,dx$, • $\displaystyle\int_{-1}^{1} \max\left\{-x, \left|x-\tfrac{1}{2}\right|\right\} dx$, • $\displaystyle\int_{-10}^{5} x|x|\,dx$,

- area $\{(x,y):\ |x|^{1/2}+|y|^{1/2}\leq 1\}$,

- area $\{(x,y):\ \frac{x^2}{9}+4y^2\leq 1\}$,

- area delimitata da $y^2=9x$ e $x^2=9y$.

- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 kx\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 hx$ $\quad (h,k\in\mathbb{N})$

- $\displaystyle\int_{-3}^{0} 2^{-x}\,dx$, $\displaystyle\int_0^1 x^2 8^{-x}\,dx$,

- Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua e periodica di periodo T,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

B. Integrazione per sostituzione. Siano $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ di classe C^1, $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ di classe C^1. Poiché

$$D\,(g(\varphi(x))) = g'(\varphi(x))\,\varphi'(x),$$

scegliendo come g la funzione

$$g(t) = \int_a^t f(s)\,ds, \quad \text{ove } f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ è continua,}$$

si ha

$$D\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = D\,g(\varphi(x)) = g'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x);$$

pertanto per ogni $u,v\in[c,d]$

$$\int_u^v f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right]_u^v =$$

$$= \int_a^{\varphi(v)} f(t)\,dt - \int_a^{\varphi(u)} f(t)\,dt = \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(t)\,dt.$$

Dunque: la variabile $x\in[u,v]$ del 1° integrale è sostituita dalla variabile $t\in[\varphi(u),\varphi(v)]$ dell'ultimo integrale: la quantità $\varphi(x)$ è diventata t, e $\varphi'(x)\,dx$ è diventato dt, in accordo col fatto che da $t=\varphi(x)$ segue $\frac{dt}{dx}=\varphi'(x)$.

La formula si può "leggere al contrario": se $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ è di classe C^1, e $\varphi(u)=p$, $\varphi(v)=q$, si ha (non serve che φ sia invertibile!)

$$\int_p^q f(t)\,dt = \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(t)\,dt = \int_u^v f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

Esempi.

1. $\int_a^b x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$. Posto $x^2=t$, si ha $dt=2x\,dx$ da cui

$$\int_a^b x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} t\sqrt{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}[t+1-1]\sqrt{1+t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\left[(1+t)^{3/2}-(1+t)^{1/2}\right]dt = \left[\frac{1}{5}(1+t)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}\right]_{a^2}^{b^2}.$$

2. $\int_a^b \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $([a,b]\subset\,]0,\infty[)$. Posto $\sqrt{x}=t$, si ha $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, da cui

$$\int_a^b \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2e^t\,dt = \left[2e^t\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}$$

3. Calcoliamo di nuovo $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$. Poniamo $t=\sin x$, quindi $dt=\cos x\,dx$. Si ha allora $\sqrt{1-t^2}=|\cos x|$.

Se scegliamo, come intervallo delle t, $[0,\frac{\pi}{2}]$, allora $\cos x>0$ e viene

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx = \text{(per parti)} \left[\frac{x+\cos x\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Se scegliamo invece $[\frac{\pi}{2},\pi]$, allora $\cos x<0$ e viene

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_\pi^{\pi/2}(-\cos x)\cos x\,dx = -\int_\pi^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = +\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 x\,dx =$$

$$= \left[\frac{x+\cos x\sin x}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Osservazione:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \left[t = \frac{\pi}{2}-x\,,\ dt = -dx\right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,[-dt] = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx.$$

Dunque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$. Ma la loro somma vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$, per cui ciascuno di essi vale $\frac{\pi}{4}$.

4. $\int_a^b \sqrt{1+t^2}\, dt$ si può fare per sostituzione o per parti:

se $t = \sinh x$, si ha (ricordando che l'inversa di $\sinh x$ è $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$ e che $dt = \cosh x\, dx$):

$$\int_{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}^{\ln(b+\sqrt{1+b^2})} \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int_{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}^{\ln(b+\sqrt{1+b^2})} \left[e^{2x}+e^{-2x}+2\right] dx =$$

$$= \left[\frac{1}{8}\left[e^{2x}-e^{-2x}\right] + \frac{1}{2}x\right]_{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}^{\ln(b+\sqrt{1+b^2})} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cosh x \sinh x + x\right]_{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}^{\ln(b+\sqrt{1+b^2})} = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_a^b.$$

Per parti:

$$\int_a^b \sqrt{1+t^2}\, dt = \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_a^b - \int_a^b \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_a^b - \int_a^b \frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_a^b - \int_a^b \sqrt{1+t^2}\, dt + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt,$$

da cui

$$2\int_a^b \sqrt{1+t^2} = \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_a^b$$

e infine si ritrova il risultato precedente.

Esercizi vari

- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx$, $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{\ln \ln x}{x}\,dx$,
- $\displaystyle\int_{-2}^{4} x^7 \cosh x^4\,dx$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{e^x+x}\,dx$,
- $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x^2\,dx$, $\displaystyle\int_3^4 \sin \ln x\,dx$

- Se f è dispari e continua, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
  Se f è pari e continua, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

- Se f è continua e ≥ 0,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b [f(x)]^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}} = \max_{[a,b]} f.$$

- Posto $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, si ha $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ $\forall n > 2$.
  Dedurre che $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, ove
  $k!!$ è il prodotto di tutti gli $h \leq k$ aventi la stessa parità di k.