EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Un' equazione differenziale ordinaria è un' identità, valida in un dato intervallo I, che lega insieme i valori della funzione incognita $y(x)$ e quelli delle sue derivate $y'(x)$, $y''(x)$, ..., fino a un certo ordine m:

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, \quad x \in I.$$

La funzione f è continua nei suoi $m+2$ argomenti in un certo aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{m+2}$; l'intervallo I può dipendere dalla soluzione y. L'ordine dell'equazione è il massimo ordine di derivazione; in questo caso, m.

L'equazione differenziale è in forma normale se è della forma

$$y^{(m)}(x) = g(x, y(x), \dots, y^{(m-1)}(x)), \quad x \in I,$$

ossia è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo.

Le equazioni differenziali saltano fuori ovunque, perché si prestano a descrivere fenomeni fisici, chimici, biologici, economici, eccetera.

L'equazione differenziale è ordinaria se la funzione incognita dipende da una sola variabile; se l'incognita dipende da più variabili si parla di equazioni alle derivate parziali e non ce ne occuperemo.

Accanto alle equazioni ci sono i sistemi differenziali, in cui l'incognita è una funzione $\underline{u}: I \to \mathbb{R}^N$; i sistemi del 1° ordine hanno la forma

$$\underline{f}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)) = 0, \quad x \in I,$$

e, in forma normale,

$$\underline{u}'(x) = \underline{g}(x, \underline{u}(x)) \quad, \ x \in I .$$

Osserviamo che ogni equazione differenziale di ordine m può essere trasformata in un sistema di m equazioni del 1° ordine: se $y \in C^m(I)$ risolve l'equazione

$$f(x, y(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, \quad x \in I,$$

allora la funzione vettoriale $\underline{u}(x) = (u^0(x), u^1(x), \dots, u^{m-1}(x))$,

ove

$$u^0(x) := y(x), \quad u^1(x) := y'(x), \ \dots, \quad u^{m-1}(x) := y^{(m-1)}(x),$$

risolve il sistema

$$\begin{cases} (u^0)'(x) = u^1(x) \\ (u^1)'(x) = u^2(x), \\ \vdots \\ (u^{m-2})'(x) = u^{m-1}(x) \\ f(x, u^0(x), \dots, u^{m-1}(x), (u^{m-1})'(x)) = 0, \end{cases} \qquad x \in I .$$

Se l'equazione era in forma normale $y^{(m)}(x) = g(x, y(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$, anche il sistema è in forma normale, perché l'ultima equazione è

$$(u^{m-1})'(x) = g(x, u^0(x), \dots, u^{m-1}(x)).$$

Non tutte le equazioni differenziali sono risolubili; ad esempio, l'equazione $1 + y(x)^2 + y'(x)^2 = 0$ non può avere soluzioni.
Ma quando ce n'è almeno una, allora ce ne sono infinite: ad esempio, se $g \in C[a,b]$, l'equazione $y'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$, ha le infinite soluzioni $y(x) = \int_a^x g(t)\,dt + c$, $c \in \mathbb{R}$.

D'ora in poi, considereremo solo equazioni in forma normale.
Per selezionare una tra le possibili infinite soluzioni di una equazione differenziale, si introduce il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x, y(x)), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ove $x_0 \in I$ è un punto fissato. Per i sistemi, analogamente,

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{g}(x, \underline{u}(x)), & x \in I \\ \underline{u}(x_0) = \underline{u}_0 . \end{cases}$$

Qui i dati $y_0 \in \mathbb{R}$ e $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^N$ sono fissati arbitrariamente.
Per una equazione di ordine m servono m condizioni:

$$\begin{cases} y^{(m)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(m-1)}(x)), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} . \end{cases}$$

Teorema di esistenza e unicità locale

Consideriamo il sistema differenziale del 1° ordine, in forma normale, con condizione di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{g}(x, \underline{u}(x)), & x \in I \\ \underline{u}(x_0) = u_0 \end{cases}$$

sotto le seguenti ipotesi:

(i) $\underline{g}: A \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$;

(ii) in più, $\underline{g}$ è <u>localmente lipschitziana</u> rispetto a $\underline{u}$, <u>uniformemente</u> rispetto a x: cioè, per ogni compatto $K \subset A$, esiste $H_K > 0$ tale che

$$|\underline{g}(x,\underline{y}) - \underline{g}(x,\underline{u})|_N \leq H_K \, |\underline{y}-\underline{u}|_N \quad \forall\, (x,\underline{y}), (x,\underline{u}) \in K;$$

(iii) $(x_0, \underline{u}_0) \in A$.

Di conseguenza, esiste un cilindro $(N+1)$-dimensionale $C \subseteq A$, di centro $(x_0, \underline{u}_0)$,

$$C = \left\{ (x,\underline{u}) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x-x_0| \leq a, \ |\underline{u}-\underline{u}_0|_N \leq b \right\}.$$

Per continuità di $\underline{g}$, esiste $M > 0$ tale che

$$|\underline{g}(x,\underline{u})|_N \leq M \qquad \forall\, (x,\underline{u}) \in C,$$

ed esiste $H > 0$ tale che

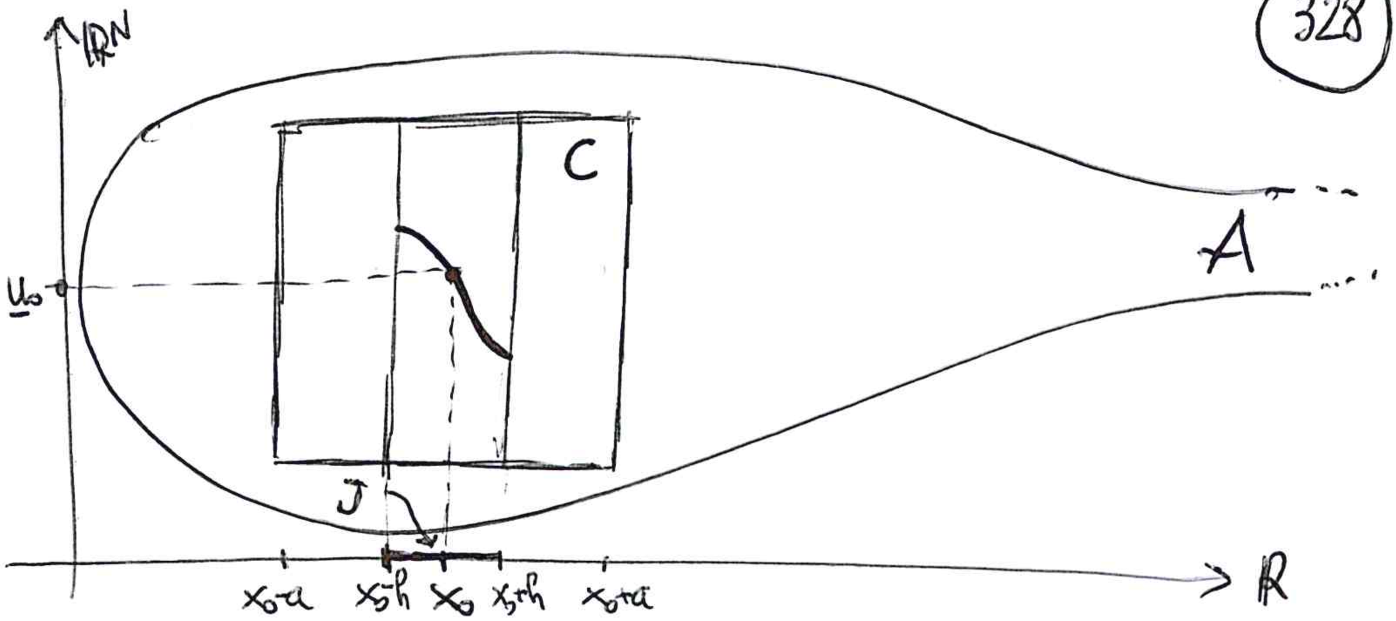
$$|\underline{g}(x,\underline{y}) - \underline{g}(x,\underline{u})|_N \leq H \, |\underline{y}-\underline{u}|_N \quad \forall\, (x,\underline{y}), (x,\underline{u}) \in C.$$

<u>Teo.</u> Nelle ipotesi sopra descritte, esiste un intervallo $J = [x_0 - h, x_0 + h]$ con $0 < h \leq a$, ed esiste un'unica $\underline{u}: J \to \mathbb{R}^N$, di classe C^1, tale che

$$\underline{u}'(x) = \underline{g}(x, \underline{u}(x)) \quad \forall x \in J, \qquad \underline{u}(x_0) = \underline{u}_0 .$$

Inoltre il grafico di $\underline{u}$ è contenuto in C, ossia $|\underline{u}(x) - \underline{u}_0|_N \leq b \ \ \forall x \in J$.

<u>dim</u> il prossimo anno. $\square$



Osservazione: per l'esistenza della soluzione, ci sono teoremi più generali; per l'unicità, invece, le ipotesi di questo teorema non si possono indebolire.

Esempio: il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^{2/3} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni: ad esempio $y(x)=0$, $\quad y(x)=\frac{(x-x_0)^3}{27}$, ma anche tutte le funzioni della forma

$$y_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le \xi \\ \frac{(x-\xi)^3}{27} & \text{se } x > \xi \end{cases}, \quad \text{ove } \xi > x_0.$$

E infatti $g(y)=y^{2/3}$ non verifica la condizione (ii): scelti i punti 0 e $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, se si avesse, per qualche $H>0$, $|g(0)-g(\frac{1}{n})| \le H \cdot \frac{1}{n}$, avremmo $\frac{1}{n^{2/3}} \le \frac{H}{n}$, ossia $n^{1/3} \le H$. Per $n \to \infty$ otterremmo un assurdo.

Osservazione La soluzione del problema di Cauchy dipende con continuità dal dato iniziale $\underline{u}_0$ (non lo verifichiamo, ma è plausibile dagli esempi che vedremo).

Prolungamento delle soluzioni

Il teorema di esistenza e unicità locale non ci dice quanto è grande l'intervallo di definizione della soluzione. Ma se la soluzione è definita in un punto $x_1 \neq x_0$, con $\underline{u}(x_1) = \underline{Y}_1$, il teorema garantisce un ulteriore prolungamento.

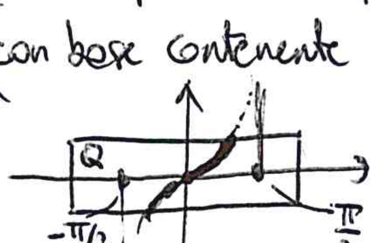
Teo. Nelle stesse ipotesi di prima, sia Q un rettangolo $(N+1)$-dimensionale chiuso, contenuto in A, ed avente $(x_0, \underline{u}_0)$ come punto interno. Allora la soluzione $\underline{u}$ del problema di Cauchy può essere univocamente prolungata ad un intervallo $[x_1, x_2]$, con $x_1 < x_0 < x_2$, in modo che i punti $(x_1, \underline{u}(x_1))$ e $(x_2, \underline{u}(x_2))$ appartengano a ∂Q.

dim. omessa.

Esempio Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y(x)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha per soluzione $y = \operatorname{tg} x$. Essa è definita solo in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; ciò non contraddice il teorema precedente, perché il suo grafico tocca il bordo di ogni rettangolo Q (con base contenente $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) nei suoi lati orizzontali.



Fino a che punto la soluzione locale è prolungabile?

I matematici ragionano così: per ogni $(x_0, \underline{u}_0) \in A$, sia

$$\mathcal{J}(x_0, \underline{u}_0) = \{ J \subseteq \mathbb{R} : J \text{ è un intervallo tale che (i) } x_0 \text{ è interno a } J, \text{ (ii) il problema di Cauchy di punto iniziale } (x_0, \underline{u}_0) \text{ ha soluzione } \underline{u}_J(x) \text{ definita su } J \}.$$

L'insieme $\mathcal{J}(x_0, \underline{u}_0)$ non è vuoto perché $I = [x_0 - h, x_0 + h] \in \mathcal{J}(x_0, \underline{u}_0)$.

Sia allora

$$J_0 = \bigcup_{J \in \mathcal{J}(x_0, \underline{u}_0)} J :$$

J_0 è un intervallo. Se poniamo $\underline{u}(x) := \underline{u}_J(x) \ \forall x \in J$, la $\underline{u}$ è ben definita su J_0, perché se $x \in J \cap J'$, con $J, J' \in \mathcal{J}(x_0, \underline{u}_0)$, allora le funzioni $\underline{u}_J$ e $\underline{u}_{J'}$ coincidono, per unicità, in $J \cap J'$. Allora la funzione $\underline{u} : J_0 \to \mathbb{R}^N$ risolve il problema di Cauchy e, per costruzione, non è ulteriormente estendibile. Essa è detta <u>soluzione massimale</u>.

<u>Osservazione</u> Se l'aperto A è una striscia $]a,b[\times \mathbb{R}^N$, e se $\underline{g}$ è definita su tale striscia ed è lipschitziana in $\underline{u}$, uniformemente in ogni sottointervallo $I = [c,d] \subset]a,b[$, ossia

$$|\underline{g}(x,\underline{u}) - \underline{g}(x,\underline{y})|_N \le H_I |\underline{u} - \underline{y}|_N \quad \forall x \in I, \ \forall \underline{u}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N,$$

allora si dimostra che la soluzione massimale del problema di Cauchy è <u>globale</u>, ossia è definita in tutto $]a,b[$. Questo è il caso dei sistemi lineari, cioè della forma

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{A}(x)\cdot \underline{u}(x) + \underline{f}(x), & \underline{x} \in \,]a,b[\,, \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

ove $\underline{A}:]a,b[\to \mathbb{R}^{N^2}$ e $\underline{f}:]a,b[\to \mathbb{R}^N$ sono continue. In questo caso la soluzione è sempre definita in tutto $]a,b[$.

Analizzeremo i seguenti tipi di equazioni differenziali del 1° ordine:

A) equazioni a variabili separabili,

B) equazioni lineari

C) equazioni riducibili al tipo A o B.

(A) Equazioni a variabili separabili: sono della forma

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y(x)) \qquad x \in I,$$

ove $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Ogni soluzione sarà definita in I, o in un suo sottointervallo, a valori in J. Si risolvono così:

1. Si cercano gli eventuali punti $y_0 \in J$ dove $g(y_0) = 0$; allora $y(x) \equiv y_0$ è soluzione costante dell'equazione.

2. Nei sottointervalli $J' \subseteq J$ dove $g \neq 0$, possiamo dividere:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \qquad x \in I',$$

ove I' è un opportuno sottointervallo di I; detta F una primitiva di f in I', e detta γ una primitiva di $\frac{1}{g}$ in J', si ha

$$\frac{d}{dx}\gamma(y(x)) = \frac{d}{dx}F(x) \quad , x\in I',$$

quindi

$$\gamma(y(x)) = F(x)+c \,, \quad x\in I',$$

dove $c\in\mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Siccome $\gamma' = \frac{1}{g} \neq 0$ in J', esiste la funzione inversa γ^{-1} e possiamo scrivere

$$y(x) = \gamma^{-1}(F(x)+c) \,, \quad x\in I';$$

questa espressione fornisce le soluzioni non costanti dell'equazione.

Esempi. (1) $y' = x(1+y^2)$.

Il passo 1 è "vuoto". Il passo 2 dà:

$$\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = x \,,$$

$$\operatorname{arctg} y(x) = \frac{x^2}{2}+c$$

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}+c\right) \quad , \quad \left|\frac{x^2}{2}+c\right| < \frac{\pi}{2} \,.$$

L'intervallo di esistenza I' della soluzione dipende da c, che non può essere presa $\geq \frac{\pi}{2}$ (altrimenti $\frac{x^2}{2}+c > \frac{\pi}{2} > \operatorname{arctg} y(x)$). Se $c=0$, si trova $I' =]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[$; se $c=-\pi$ si hanno 2 soluzioni in 2 intervalli differenti: $]\sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi}[$ e $]-\sqrt{3\pi}, -\sqrt{\pi}[$.

(2) $y' = \sqrt{y}$.

C'è la soluzione $y(x) \equiv 0$. Poi,

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 1$$

$$2\sqrt{y(x)} = x + c \quad , \; c \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \quad \text{(soluzione non costante)}.$$

Questa soluzione è definita su $I' = \mathbb{R}$. Ma vi è anche, per esempio, per ciascun $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$y_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -\lambda \\ \left(\frac{x+\lambda}{2}\right)^2 & \text{se} \quad x \geq \lambda, \end{cases}$$

che non fa parte di quelle già trovate.

(3) $y' = -\frac{x}{y}$.

Qui cerchiamo soluzioni $y \neq 0$. Si ha

$$yy' = -x$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{x^2}{2} + c, \qquad c > 0,$$

$$y = \pm\sqrt{2c - x^2}, \qquad |x| \leq \sqrt{2c}$$

Si tratta di due semicirconferenze (di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2c}$).

Si noti che, scrivendo formalmente l'equazione come

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

essa è anche risolta dalle funzioni

$$x=\pm\sqrt{2c-y^2}\,,\qquad |y|<\sqrt{2c}\,,$$

ottenute esplicitando rispetto a x l'equazione $\frac{x^2+y^2}{2}=c$.

In generale, l'equazione

$$\gamma(y)-F(x)=c\,,$$

ottenuta nel 2° passo, rappresenta una curva del piano la quale, localmente (ossia nell'intorno di ogni suo fissato punto) è grafico di una funzione $y(x)$, oppure $x(y)$, che risolve l'equazione

$y'=f(x)g(y)$ oppure $x'=\frac{1}{f(x)g(y)}$, ovvero $\frac{dy}{g(y)}-f(x)dx=0$.

(4) $y'=\dfrac{\sin^2 x}{y^2+e^y}$

Si trova
$$(y^2+e^y)\,y'=\sin^2 x$$
$$\frac{y^3}{3}+e^y=\frac{x-\sin x\cos x}{2}+c\,.$$

Qui non riusciamo ad esplicitare y in funzione di x e nemmeno x in funzione di y. Ogni soluzione ha per grafico un pezzo di qualche curva di livello della funzione

$$F(x,y)=\frac{y^3}{3}+e^y-\frac{x}{2}+\frac{\sin x\cos x}{2}\,.$$