Successioni definite per ricorrenza

Vogliamo determinare il comportamento per $n\to\infty$ di successioni della forma

$$(*) \qquad \begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = f(a_n), \quad n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

ove $f: I \to I$ è una funzione continua, I è un intervallo di $\mathbb{R}$ (limitato o no), e $\lambda \in I$.

In generale il comportamento di $\{a_n\}$ può essere molto difficile da determinare; tuttavia se $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, allora deve essere $L = f(L)$, in virtù della continuità di f. Un punto $L\in I$ tale che $f(L) = L$ si dice <u>punto fisso</u> di f; dunque se $\{a_n\}$ ha limite finito, tale limite è un punto fisso di f.

<u>Esempi</u> (1) Sia

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = 2^{a_n}, \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Poiché $f(x) = 2^x$, $x\in\mathbb{R}$, non ha punti fissi, ed è crescente, si vede subito (per induzione) che $\{a_n\}$ è crescente: dunque ha limite. Tale limite, non potendo essere finito, è $+\infty$.

(2) Sia

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \sin a_n, \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Per $n\geq 1$ si ha $\{a_n\}\in[-1,1]$. La funzione $f(x) = \sin x$, $x\in[-1,1]$, ha l'unico punto fisso $x=0$ ed è crescente: è facile allora vedere che $\{a_n\}$ è crescente se $a_1 = \sin\lambda < 0$ ed è decrescente se $a_1 = \sin\lambda > 0$. Dunque ha limite e il limite è 0.

Analizzeremo il comportamento della successione $\{a_n\}$ definita per ricorrenza in due casi: (a) quando f è una contrazione, (b) quando f è monotona.

(a) Anzitutto:

Definizione Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, sia $f: I \to I$. Diciamo che f è una contrazione se esiste $K \in [0,1[$ tale che

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \quad \forall x, x' \in I.$$

Dunque le contrazioni sono funzioni lipschitziane con costante minore di 1.

Il teorema che segue risolve la situazione nel nostro caso.

Teorema Sia I un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, limitato o no, e sia $f: I \to I$ una contrazione. Allora f ha uno e un solo punto fisso $L \in I$. Inoltre, per ogni $\lambda \in I$ la successione $\{a_n\}$ definita da ⊛ ha limite L, e vale la seguente stima dell'errore:

$$|a_n - L| \leq K^n |\lambda - L| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

dim. Proviamo l'unicità del punto fisso. Se $L, L' \in I$, con

$$L = f(L), \quad L' = f(L'),$$

allora

$$|L - L'| = |f(L) - f(L')| \le K\,|L - L'|;$$

essendo $K < 1$, deve essere $L = L'$.

Proviamo l'esistenza del punto fisso.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \le K\,|a_n - a_{n-1}|,$$

e iterando "all'indietro" questa disuguaglianza si ottiene

$$|a_{n+1} - a_n| \le K^2\,|a_{n-1} - a_{n-2}| \le \dots \le K^n\,|a_1 - \lambda| \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Siano adesso $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$. Risulta

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{h=n}^{m-1} (a_{h+1} - a_h)\right| \le \sum_{h=n}^{m-1} |a_{h+1} - a_h| \le \sum_{h=n}^{m-1} K^h\,|a_1 - \lambda|;$$

dato che la serie geometrica $\sum_{h=0}^{\infty} K^h$ è convergente, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{h=n}^{\infty} K^h < \varepsilon$ per ogni $n \ge \nu$. Ne segue

$$|a_m - a_n| \le \sum_{h=n}^{\infty} K^h\,|a_1 - \lambda| < \varepsilon\,|a_1 - \lambda| \quad \forall m, n \ge \nu.$$

Dunque, essendo

$$a_\nu - \varepsilon\,|a_1 - \lambda| < a_m < a_\nu + \varepsilon\,|a_1 - \lambda| \qquad \forall m \ge \nu,$$

si deduce che $0 \le \max\lim_{m\to\infty} a_m - \min\lim_{m\to\infty} a_m \le 2\varepsilon\,|a_1 - \lambda| \quad \forall \varepsilon > 0.$

Ciò prova che

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \min\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R},$$

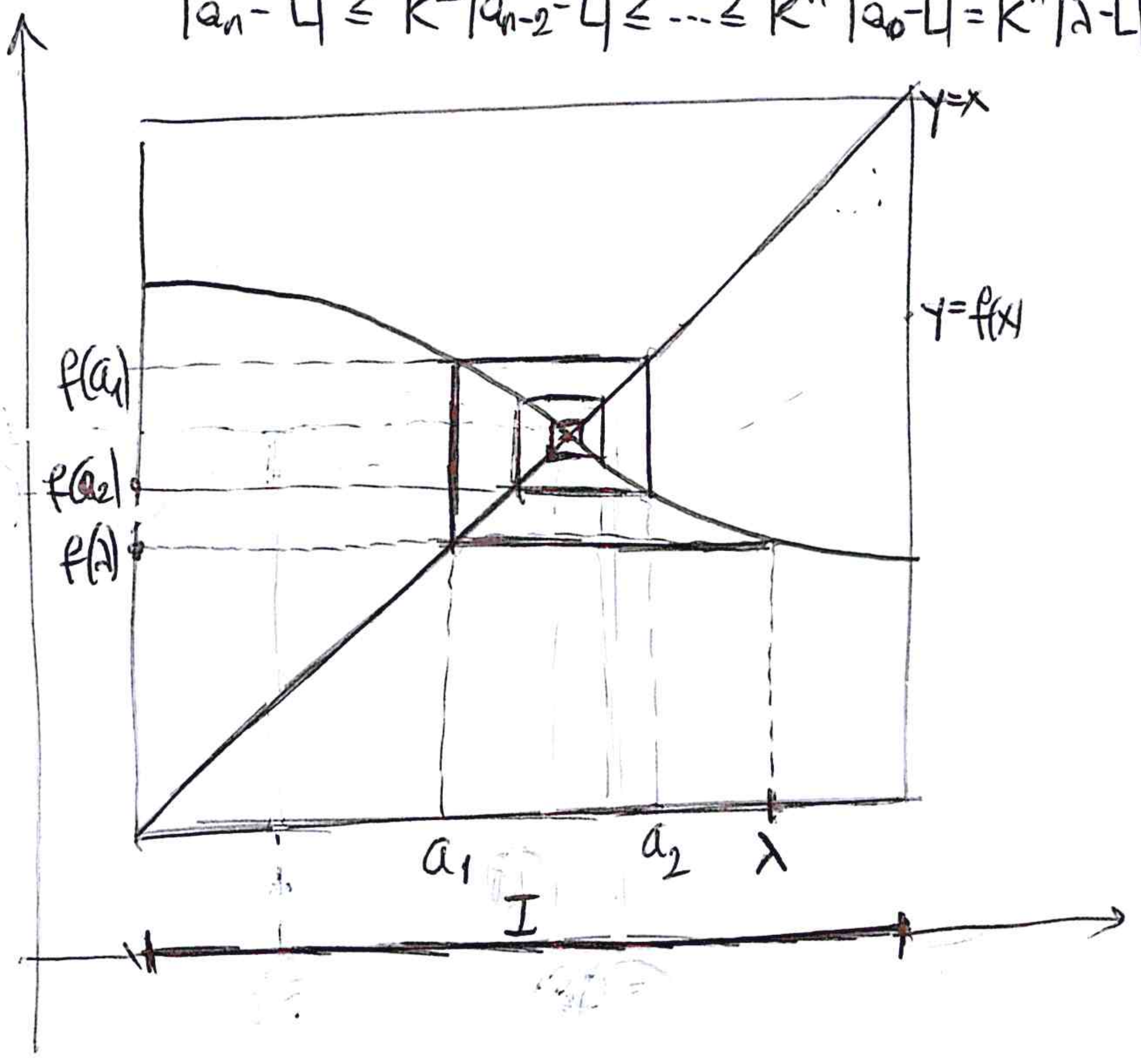
ossia che $\{a_n\}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$. Tale limite appartiene a I, perchè I è chiuso, ed è un punto fisso di f. Dunque f ha un punto fisso.

Proviamo infine la stima dell'errore: si ha

$$|a_n - L| = |f(a_{n-1}) - f(L)| \leq K\,|a_{n-1} - L| \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

ossia, iterando,

$$|a_n - L| \leq K^2 |a_{n-2} - L| \leq \dots \leq K^n |a_0 - L| = K^n |\lambda - L|. \square$$



(b) Sia ora $f: I \to I$ monotona. La f sarà crescente, oppure decrescente; in entrambi i casi, il comportamento di $\{a_n\}$ dipenderà, oltre che da f, dalla scelta del valore iniziale $a_0 = \lambda$.

<u>Teorema</u> Sia $f: I \to I$ continua e crescente.

(i) Se $f(\lambda) \geq \lambda$, allora la successione $\{a_n\}$ è crescente, mentre se $f(\lambda) \leq \lambda$ allora la successione $\{a_n\}$ è decrescente.

(ii) Se $f(\lambda) > \lambda$ allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } f \text{ non ha punti fissi } > \lambda, \\ \lambda_1 & \text{se } \lambda_1 \text{ è il minimo punto fisso di } f \text{ maggiore di } \lambda. \end{cases}$$

(iii) Se $f(\lambda) < \lambda$ allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } f \text{ non ha punti fissi } < \lambda, \\ \lambda_2 & \text{se } \lambda_2 \text{ è il massimo punto fisso di } f \text{ minore di } \lambda. \end{cases}$$

(iv) Se $f(\lambda) = \lambda$ allora $a_n = \lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

<u>dim</u> (i) Se $f(\lambda) \geq \lambda$, cioè $a_1 \geq a_0$, allora per la crescenza di f si ha $a_2 = f(a_1) \geq a_1 = f(a_0)$, e per induzione segue $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n. Discorso analogo se $f(\lambda) \leq \lambda$.

(ii) Sia $F = \{\ell > \lambda : \ell = f(\ell)\}$. Se $F = \emptyset$, allora $\{a_n\}$, essendo crescente (visto che $f(\lambda) > \lambda$), deve necessariamente tendere a $+\infty$. Se $F \neq \emptyset$, sia $L = \inf F$. Dalle proprietà dell'estremo inferiore segue che esiste una successione di punti fissi $\{\ell_n\} \subseteq F$

tale che $\ell_n \to L$ per $n \to \infty$. Da $\ell_n = f(\ell_n)$, per continuità, segue $L = f(L)$. Quindi L è punto fisso di f, e $L \geq \lambda$; ma non può essere $L = \lambda$ perché $f(\lambda) > \lambda$. Quindi $L > \lambda$ e pertanto $L = \min F$. Poiché $\lambda < L$, si ha, per crescenza di f,

$$a_0 = \lambda < a_1 = f(\lambda) \leq f(L) = L;$$

poiché $a_1 \leq L$, segue $a_2 = f(a_1) \leq f(L) = L$, e per induzione $a_n \leq a_{n+1} \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò $a_n \to L$ perché non vi sono altri punti fissi fra λ e L.

(iii) Analoga a (ii) (stavolta $f(\lambda) < \lambda$, quindi $\{a_n\}$ è decrescente mentre f è crescente).

(iv) Evidente. $\square$

<u>Esempio</u>. Sia

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n + \sin a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La funzione $f(x) = x + \sin x$, definita su $\mathbb{R}$, è crescente perché $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$. I suoi punti fissi sono $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Perciò si ha:

$$\lambda \in \,](k-1)\pi, k\pi[, \ k \text{ pari} \implies f(\lambda) = \lambda + \sin\lambda \leq \lambda \implies \lim_{n\to\infty} a_n = (k-1)\pi;$$

$$\lambda \in \,](k-1)\pi, k\pi[, \ k \text{ dispari} \implies f(\lambda) \geq \lambda \implies \lim_{n\to\infty} a_n = k\pi.$$

Teorema Sia $f: I \to I$ continua e decrescente.

(i) se $f(f(\lambda)) \geq \lambda$, allora $\{a_{2n}\}$ è crescente e $\{a_{2n+1}\}$ è decrescente; se $f(f(\lambda)) \leq \lambda$, allora $\{a_{2n}\}$ è decrescente e $\{a_{2n+1}\}$ è crescente.

(ii) se $f(\lambda) \geq \lambda$, allora $a_{2n} \leq a_{2n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre se $f(\lambda) \leq \lambda$, allora $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Se esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in [-\infty, +\infty]$, allora $L \in \mathbb{R}$ con $f(L) = L$, e inoltre $f(f(\lambda))$ è compreso fra λ e $f(\lambda)$; il viceversa è falso.

(iv) esiste $\lim_{n\to\infty} a_n \in L$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.

__dim__. Sia $f(f(\lambda)) \geq \lambda$, ossia $a_2 \geq a_0$. La decrescenza di f implica $a_3 \leq a_1$, $a_4 \geq a_2$ e in generale

$$a_{2n+3} \leq a_{2n+1}, \qquad a_{2n+2} \geq a_{2n}.$$

Discorso analogo se $f(f(\lambda)) \leq \lambda$.

(ii) Sia $f(\lambda) \geq \lambda$, ossia $a_1 \geq a_0$. Per decrescenza di f si deduce $a_2 \leq a_1$, $a_3 \geq a_2$, e in generale

$$a_{2n} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Discorso analogo se $f(\lambda) \leq \lambda$.

(iii) Osserviamo anzitutto che, poiché $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$, si ha anche $a_{2n} \to L$, $a_{2n+1} \to L$. Ne segue che L non può essere $+\infty$ (perché una delle due successioni è decrescente), né $-\infty$ (perché una delle due successioni è crescente). Quindi $L \in \mathbb{R}$ e $f(L) = L$.

Adesso, distinguiamo due casi:

- se $a_2 \geq a_0$, cioè $f(f(\lambda)) \geq \lambda$, allora

$$a_{2n-1} \geq a_{2n+1} \geq L \geq a_{2n+2} \geq a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e in particolare $a_1 \geq L \geq a_2 \geq a_0$, ossia $f(\lambda) \geq f(f(\lambda)) \geq \lambda$.

- se $a_2 \leq a_0$, cioè $f(f(\lambda)) \leq \lambda$, allora

$$a_{2n} \geq a_{2n+2} \geq L \geq a_{2n+1} \geq a_{2n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e in particolare $a_0 \geq a_2 \geq L \geq a_1$, ossia $\lambda \geq f(f(\lambda)) \geq f(\lambda)$.

Viceversa, sia

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

per questa successione si ha $2 = \lambda = f(f(\lambda)) \geq f(\lambda) = \frac{1}{2}$, e il limite non esiste, poiché $a_{2n} = 2$ e $a_{2n+1} = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Se esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in [-\infty, +\infty]$, come si è visto risulta $L \in \mathbb{R}$ e $L = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Ne segue $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ (poiché n e $n+1$ hanno diversa parità). Viceversa, se $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ allora, osservato che per (i)

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_{2n} = P, \quad \exists \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = D,$$

si ha

$$P = \lim_{n\to\infty} \left[(a_{2n} - a_{2n+1}) + a_{2n+1} \right] = 0 + D = D, \qquad P = D \in \mathbb{R}.$$

da cui segue immediatamente che $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

$\square$

<u>Esempi</u> (1) $\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$

La funzione $f(x) = x^2$ è crescente in $[0, \infty[$, con i punti fissi 0 e 1. Inoltre $a_n \in [0, \infty[$ per ogni $n \geq 1$. Quindi:

$0 \leq |\lambda| < 1 \Rightarrow f(\lambda) = \lambda^2 < |\lambda| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

$|\lambda| > 1 \Rightarrow f(\lambda) = \lambda^2 > |\lambda| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

$|\lambda| = 1 \Rightarrow a_n = 1 \ \forall n \geq 1$.

(2) $\begin{cases} a_0 = \lambda \neq 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n^2} \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$

La funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è decrescente in $]0, \infty[$, con il punto fisso $x = 1$; inoltre $a_n \in]0, \infty[$ per ogni $n \geq 1$. Quindi,

$0 < |\lambda| < 1 \Rightarrow f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} > |\lambda|, \ f(f(\lambda)) = \lambda^4 < |\lambda|$

$\Rightarrow a_{2n} \leq a_{2n+1}, \ a_{2n} \searrow, \ a_{2n+1} \nearrow$

$\Rightarrow$ il limite non esiste;

$|\lambda| = 1 \Rightarrow a_n = 1 \ \forall n \geq 1$,

$|\lambda| > 1 \Rightarrow f(\lambda) < |\lambda|, \ f(f(\lambda)) > |\lambda|$,

$\Rightarrow a_{2n} \geq a_{2n+1}, \ a_{2n} \nearrow, \ a_{2n+1} \searrow$,

$\Rightarrow$ il limite non esiste.

In effetti è facile verificare che $a_n = \lambda^{(-1)^n 2^n}$; quindi $\{a_{2n}\}$ tende a $+\infty$, mentre $\{a_{2n+1}\}$ tende a 0.

(3) $\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{2a_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

La funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$ è decrescente e positiva su $[0, \infty[$, poiché $f'(x) = -\dfrac{3}{(2x+1)^2} < 0$. Inoltre $f(f(x)) = \dfrac{5x+4}{4x+5}$. Dunque

$$f(\lambda) \geq \lambda \iff \lambda \in [-1, 1], \qquad f(f(\lambda)) \geq \lambda \iff \lambda \in [-1, 1].$$

In particolare, $\lambda = 1$ è l'unico punto fisso di $f(x)$ e di $f(f(x))$. Quindi:

$$|\lambda| \leq 1 \implies a_{2n} \leq a_{2n+1}, \quad a_{2n} \nearrow, \quad a_{2n+1} \searrow,$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

$$|\lambda| \geq 1 \implies a_{2n} \geq a_{2n+1}, \quad a_{2n} \searrow, \quad a_{2n+1} \nearrow,$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Si conclude che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione tende a 1.

<u>Esercizi</u>

- $\begin{cases} a_0 = \lambda \geq 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 - \ln a_n, \end{cases}$

- $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n - a_n^2 + 2) \end{cases}$

- $\begin{cases} a_0 = \lambda \in [0, 1] \\ a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n (1 - a_n) \end{cases}$

- $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = e^{a_n} - 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{a_n + 2} \end{cases}$

- $\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{|a_n + 1|}{2}. \end{cases}$