Successioni di funzioni

Sia A un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^N$. Consideriamo una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n : A \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definizione Diciamo che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in A ad una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ se risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\underline{x}) = f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in A.$$

Definizione Diciamo che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in A ad una funzione $f: A\to\mathbb{R}$ se risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\underline{x}\in A} |f_n(\underline{x}) - f(\underline{x})| = 0.$$

Riscriviamo le due definizioni per confrontarle meglio:

Convergenza puntuale:

$\forall \underline{x}\in A$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \nu\in\mathbb{N}$ tale che $|f_n(\underline{x})-f(\underline{x})|<\varepsilon$ $\forall n\geq \nu$.

Convergenza uniforme:

$\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \nu\in\mathbb{N}$ tale che $|f_n(\underline{x})-f(\underline{x})|<\varepsilon$ $\forall \underline{x}\in A$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Dunque la stringa "$\forall \underline{x}\in A$" si è spostata dall'inizio alla fine della frase. La conseguenza è che la soglia ν, oltre la quale si ha $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, dipende da x e da ε nel caso della convergenza puntuale, mentre dipende solo da ε nel caso della convergenza uniforme. (2)

Pertanto, la convergenza uniforme implica la puntuale.
Il viceversa è falso:

Esempio La successione $\{f_n\}$ definita in $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ da

$$f_n(x)=x^n, \qquad n\in\mathbb{N},$$

verifica

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x=1\\ 0 & \text{se } x\in[0,1[\,,\end{cases}$$

quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x=1\\ 0 & \text{se } x\in[0,1[\,.\end{cases}$$

Tuttavia la convergenza non è uniforme: infatti per ogni n si ha

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max\left\{\sup_{x\in[0,1[}|x^n-0|,\ |f_n(1)-1|\right\}=$$

$$=\sup_{x\in[0,1[}x^n=1,$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1\neq 0.$$

Invece f_n converge uniformemente a 0 su $[0,1-\delta]$ per ogni $\delta\in]0,1[$, poiché $\sup_{x\in[0,1-\delta]}x^n=(1-\delta)^n\to 0$ per $n\to\infty$.

Esempi ulteriori:

1. $f_n(x) = e^{-nx}$ converge puntualmente in $[0,\infty[$ a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0; \end{cases}$$

la convergenza non è uniforme perchè

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} e^{-nx} = 1 \not\to 0,$$

però è uniforme in $[\delta,\infty[$ per ogni $\delta>0$, dato che

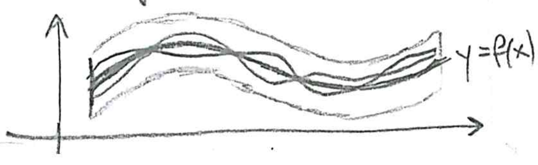
$$\sup_{x\geq\delta} e^{-nx} = e^{-n\delta} \to 0 \quad \text{per } n\to\infty.$$

2. $f_n(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{n}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}^2$ a 0;

la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}^2$, ma è uniforme in ogni palla chiusa $\bar{B}((0,0),R)$, poichè

$$\sup_{(x,y)\in\bar{B}((0,0),R)} \frac{x^2+y^2}{n} = \frac{R^2}{n} \to 0 \quad \text{per } n\to\infty.$$

<u>Osservazione</u>: quando la convergenza delle f_n a f è uniforme, si può costruire un "tubo" intorno al grafico di f, di raggio ε; e per $n\geq\nu$ tutti i grafici delle f_n saranno contenuti in tale tubo.



Accanto alle successioni è naturale considerare le serie di funzioni: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\underline{x})$ è la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali:

$$S_n(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\underline{x}) \ , \quad n\in\mathbb{N} \ ,$$

dove, come prima, $f_k : A \to \mathbb{R}$ per $k\in\mathbb{N}$, con A chiuso di $\mathbb{R}^N$

__Definizione__ La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ __converge puntualmente__ in A se per ogni $\underline{x}\in A$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\underline{x})$ è convergente, ossia $\forall \underline{x}\in A \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu\in\mathbb{N}$ tale che $\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(\underline{x})\right| < \varepsilon \ \forall n\geq\nu$.

__Definizione__ La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ __converge uniformemente__ in A se

$\forall\varepsilon>0 \ \exists \nu\in\mathbb{N}$ tale che $\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(\underline{x})\right| < \varepsilon \quad \forall n\geq\nu, \forall \underline{x}\in A$.

In più, per le serie vi sono altri __due__ tipi di convergenza:

__Definizione__ La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ __converge assolutamente__ in A se per ogni $x\in A$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\underline{x})$ converge assolutamente, ossia $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(\underline{x})|$ è convergente.

__Definizione__ La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ __converge totalmente__ in A se la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(\underline{x})|$$

è convergente.

Confrontiamo questi tipi di convergenza:

<u>Proposizione</u> Vale:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{convergenza uniforme} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{convergenza totale} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{convergenza puntuale} \\
 & \text{convergenza assoluta} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Inoltre, nessun viceversa è vero, e nessuna implicazione lega la convergenza uniforme e la assoluta.

<u>dim</u>. Se vale la convergenza totale, poiché $\sum \sup_{\underline{x}\in A}|f_n|$ è convergente, fissato $\varepsilon>0$ esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sup_{x\in A}|f_n(\underline{x})| < \varepsilon \quad \forall n\geq\nu .$$

Dunque, per ogni $n\geq\nu$,

$$\sup_{\underline{x}\in A}\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(\underline{x})\right| \leq \sup_{\underline{x}\in A}\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(\underline{x})| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\sup_{\underline{x}\in A}|f_k(\underline{x})| < \varepsilon ,$$

ossia vale la convergenza uniforme. Inoltre, per ogni $\underline{x}\in A$,

$$\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(\underline{x})| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\sup_{\underline{x}\in A}|f_k(\underline{x})| < \varepsilon \quad \forall n\geq\nu ,$$

quindi vale la convergenza assoluta. Sappiamo poi che dalla convergenza uniforme o assoluta segue la puntuale.
Per provare la falsità delle implicazioni citate, basta un solo esempio: consideriamo la serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

che ha raggio di convergenza 1. Questa serie:

(a) converge puntualmente [a $\ln(1-x)$] per ogni $x \in [-1,1[$;

(b) converge assolutamente per ogni $x \in]-1,1[$;

(c) converge uniformemente in $[-1, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in]0,2[$,

(d) converge totalmente in $[-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in]0,2[$.

Dunque nessuna delle implicazioni citate può valere

La (a) è nota dall'Analisi 1.

La (b) è facile (criterio della radice)

La (d) è facile: $\displaystyle\sup_{|x|\leq 1-\delta} \frac{|x^n|}{n} = \frac{(1-\delta)^n}{n}$ è il termine generale

di una serie convergente.

La (c) in $[0,1-\delta]$ segue da (d); in $[-1,0]$ è conseguenza

del criterio di Leibniz e della relativa stima del resto:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n}\right| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [-1,0],$$

quindi

$$\sup_{x\in[-1,0]} \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Avendo la convergenza uniforme in $[-1,0]$ e in $[0,1-\delta]$, si ricava subito che c'è la convergenza uniforme in $[-1, 1-\delta]$. $\sqcup$

Perchè è importante la convergenza uniforme? Perchè preserva importanti proprietà quali la continuità e l'integrabilità.

<u>Teorema</u> Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue, definite su un chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Se $f_n \to f$ uniformemente in A, allora f è continua in A.

<u>dim</u>. Sia $\underline{x}_0 \in A$ e proviamo che f è continua in $\underline{x}_0$. Se $\underline{x}_0$ è punto isolato di A non c'è nulla da dimostrare, quindi supponiamo che $\underline{x}_0$ sia punto d'accumulazione per A.

Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f(\underline{x}) - f_n(\underline{x})| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \ \forall \underline{x} \in A.$$

Per $\underline{x} \in A$ scriviamo

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \leq |f(\underline{x}) - f_\nu(\underline{x})| + |f_\nu(\underline{x}) - f_\nu(\underline{x}_0)| + |f_\nu(\underline{x}_0) - f(\underline{x}_0)| \leq$$

$$\leq \varepsilon + |f_\nu(\underline{x}) - f_\nu(\underline{x}_0)| + \varepsilon ;$$

Ora, essendo f_ν continua in $\underline{x}_0$, esiste $\delta > 0$ (dipendente da $\nu, \varepsilon, \underline{x}_0$) tale che

$$|f_\nu(\underline{x}) - f_\nu(\underline{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \cap A.$$

Poichè δ dipende solo da ε e $\underline{x}_0$ (dato che ν dipende solo da ε), si ha

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \leq 3\varepsilon \quad \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \cap A :$$

ciò prova che f è continua in $\underline{x}_0$. $\square$

Teorema Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite su $[a,b]$, tutte integrabili secondo Riemann in $[a,b]$. Se $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora anche f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ed anzi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0.$$

dim. Omettiamo la noiosa verifica dell'integrabilità di f e limitiamoci a provare la seconda uguaglianza (che implica banalmente la prima).
Sia $\varepsilon>0$: allora esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall n\geq\nu,\ \forall x\in[a,b].$$

Ne segue, essendo $|f_n-f|$ integrabile in $[a,b]$,

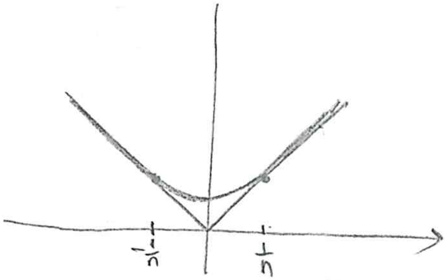
$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx=\varepsilon \quad \forall n\geq\nu,$$

e ciò prova la tesi. □

Osservazione La convergenza uniforme non preserva la derivabilità: le funzioni $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, definite da

$$f_n(x)=\begin{cases} |x| & \text{se } \frac{1}{n}<|x|\leq 1 \\ \frac{n}{2}|x|^2+\frac{1}{2n} & \text{se } |x|\leq\frac{1}{n} \end{cases}$$

sono di classe $C^1[-1,1]$, come è facile verificare.
Esse convergono uniformemente in $[-1,1]$ alla funzione $f(x)=|x|$, che non è derivabile nell'origine. Si ha infatti



$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| = |f_n(0)| = \frac{1}{2n} \to 0.$$

Tuttavia:

<u>Teorema</u> Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di classe C^1, definite in $[a,b]$. Se $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$ e se f_n' converge uniformemente ad un'altra funzione $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, allora si ha $f\in C^1[a,b]$ e $f'=g$ in $[a,b]$.

<u>dim</u> Fissati $n\in\mathbb{N}$, $x_0\in[a,b]$ e $x\in[a,b]\setminus\{x_0\}$, si ha

$$f_n(x)-f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt .$$

Per $n\to\infty$, il primo membro tende a $f(x)-f(x_0)$, mentre il secondo membro, per il teorema precedente, tende a $\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$.
Dunque

$$f(x)-f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Dividendo per $x-x_0$ e facendo il limite per $x\to x_0$, essendo g continua (perché limite uniforme di funzioni continue) si ottiene

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

Essendo x_0 arbitrario, f è derivabile in $[a,b]$ con $f' = g$.
Essendo g continua, f è di classe C^1. $\square$

<u>Osservazione</u> Il teorema precedente si estende alle funzioni di più variabili nel modo seguente.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, sia $B \subseteq A$ un parallelepipedo N-dimensionale. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni di classe C^1 in A, tale che:

(i) $f_n \to f$ uniformemente in B,

(ii) $D_i f_n \to g_i$ uniformemente in B, per $i = 1, \dots, N$,

allora $f \in C^1(B)$ e $D_i f = g_i$ per $i = 1, \dots, N$.

La dimostrazione è essenzialmente la stessa (si muove una sola variabile per volta).