Funzioni localmente invertibili

Alle funzioni $\underline{F}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, con $N > p$, si applica, quando è possibile, il teorema del Dini, che esplicita p variabili in funzione delle altre $N-p$.

Per le funzioni $\underline{F}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ si pone invece il problema dell'invertibilità. Sotto quali ipotesi $\underline{F}$ è invertibile?

Esempio (coordinate polari nel piano).

Sia $\underline{F}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, con $r>0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Si vede subito che $\underline{F}: (]0,\infty[\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ è di classe C^∞, con

$$D\underline{F}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix};$$

quindi

$$\det D\underline{F}(r,\theta) = r > 0.$$

Si potrebbe pensare che ciò garantisca l'invertibilità di $\underline{F}$, ma quest'ultima è certamente falsa poiché $\underline{F}$ non è iniettiva ($\underline{F}(r,\theta) = \underline{F}(r,\theta+2\pi)$).

Tuttavia è valido un risultato di invertibilità locale:

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $\underline{F}: A \to \mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^1. Sia $\underline{x}_0 \in A$ tale che

$$\det D\underline{F}(\underline{x}_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di $\underline{x}_0$ e un intorno V di $\underline{F}(\underline{x}_0)$ tali che $\underline{F}: U \to V$ è bigettiva. Inoltre $\underline{F}^{-1}: V \to U$ è di classe C^1 con $D\underline{F}^{-1}(\underline{y}) = [(D\underline{F})(\underline{F}^{-1}(\underline{y}))]^{-1}$ $\forall y \in V$.
Inoltre se $F \in C^m$ allora $F^{-1} \in C^m$.

Si noti che questa formula ci era già nota nel caso $N=1$.

__dim__ È facile conseguenza del teorema del Dini in $\mathbb{R}^N$.
Vogliamo ricavare $\underline{x}$ dall'equazione $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{y}$. Scriviamo tale equazione come $\underline{y} - \underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$.
Posto $\underline{G}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y} - \underline{F}(\underline{x})$, $\underline{G}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, con

$$\underline{G}_x(\underline{x}, \underline{y}) = -D\underline{F}(\underline{x}), \quad G_y(\underline{x}, \underline{y}) = I \quad \forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Posto $\underline{y}_0 = \underline{F}(\underline{x}_0)$, nel punto $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ si ha in particolare

$$\det G_x(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = (-1)^N \det D\underline{F}(\underline{x}_0) \neq 0.$$

Dunque per il teorema del Dini esistono un intorno U di $\underline{x}_0$, un intorno V di $\underline{y}_0$ e una funzione $\underline{h}: V \to U$ tali che

$$\underline{y} - \underline{F}(\underline{x}) = \underline{G}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0} \iff \underline{x} = \underline{h}(\underline{y}).$$

Ciò mostra che $\underline{h}(\underline{y}) = \underline{F}^{-1}(\underline{y})\ \forall \underline{y}\in V$. Inoltre

$$D\underline{h}(\underline{y}) = -\underline{G}_{\underline{y}}(\underline{h}(\underline{y}),\underline{y})^{-1}\,\underline{G}_x(\underline{h}(\underline{y}),\underline{y}) =$$

$$= -\underline{G}_x(\underline{h}(\underline{y}),\underline{y}) = +D\underline{F}(\underline{h}(\underline{y}))\quad \forall \underline{y}\in V,$$

che è la tesi. □

<u>Esempio</u> Per le coordinate polari, sia ad esempio (r_0,θ_0) tale che $r_0>0$, $\theta_0\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Allora, posto $x_0=r_0\cos\theta_0$, $y_0=r_0\sin\theta_0$, si ha

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

da cui

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad \text{in un intorno di } (x_0,y_0).$$

Quindi $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ è <u>localmente invertibile</u>.

<u>Il teorema del rango</u>

Nel caso di funzioni $\underline{F}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, con $N<p$, il fenomeno da studiare è la descrizione dell'immagine di F: localmente, $\underline{F}$ trasforma una palla di $\mathbb{R}^N$ in una "copia deformata" di una palla di $\mathbb{R}^N$ nello spazio più grande $\mathbb{R}^p$.

Preliminarmente, vediamo come si esprimono le derivate parziali prime di una funzione composta a valori vettoriali.

<u>Proposizione</u> Siano $\underline{h}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, $\underline{k}: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1. Se $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^q$, per la funzione $\underline{h} \circ \underline{k}: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ si ha

$$\frac{\partial (\underline{h} \circ \underline{k})_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial h_i}{\partial y_r}(\underline{k}(\underline{x}_0)) \cdot \frac{\partial k_r}{\partial x_j}(\underline{x}_0), \quad i=1 \ldots p, \; j=1 \ldots q,$$

vale a dire, per un generico $\underline{x}$ si ha

$$D\, \underline{h} \circ \underline{k}(\underline{x}) = (D\underline{h})(\underline{k}(\underline{x})) \cdot D\underline{k}(\underline{x}):$$

la matrice Jacobiana di $\underline{h} \circ \underline{k}$ è il prodotto riga per colonna delle matrici Jacobiane di $\underline{h}$ e $\underline{k}$ (in questo ordine).

<u>dim</u>. È l'usuale regola di derivazione di una funzione (scalare) composta, fatta componente per componente $\square$

Torniamo adesso al teorema del rango: vediamo come si esprime precisamente l'idea sopra esposta di "copia deformata" di una palla.

Teorema (del rango). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia $\underline{F}: A \to \mathbb{R}^p$, di classe C^1, con $p > N$. Sia $\underline{x}_0 \in A$ tale che la matrice $DF(\underline{x}_0)$, che è $p \times N$, abbia rango massimo N: supponiamo in particolare che

$$\det \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \right\}_{i,j=1,\dots,N} \neq 0 .$$

Allora esiste un intorno U di x_0 in $\mathbb{R}^N$, tale che $\underline{F}(U)$ è il grafico di una funzione $\underline{G}$ di N variabili, a valori in $\mathbb{R}^{p-N}$, di classe C^1; il piano N-dimensionale tangente nel punto $F(\underline{x}_0)$ a questo grafico è il piano per $\underline{F}(\underline{x}_0)$ generato dagli N vettori $\frac{\partial \underline{F}}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial \underline{F}}{\partial x_N}(\underline{x}_0)$.

dim. Scriviamo i punti di $\mathbb{R}^p$ come $(\underline{y}, \underline{z})$, dove $\underline{y} \in \mathbb{R}^N$ e $\underline{z} \in \mathbb{R}^{p-N}$. Similmente scriviamo

$$\underline{F}(\underline{x}) = (\underline{f}(\underline{x}), \underline{g}(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in A,$$

ove $\underline{f} = (F_1 \dots F_N)$ e $\underline{g} = (F_{N+1} \dots F_p)$. Dunque sarà

$$\underline{F}(A) = \{ (\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbb{R}^p : \ \underline{y} = \underline{f}(\underline{x}),\ \underline{z} = \underline{g}(\underline{x}),\ \underline{x} \in A \}.$$

Poniamo $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$, $\underline{z}_0 = \underline{g}(\underline{x}_0)$. Per ipotesi, $\det D\underline{f}(\underline{x}_0) \neq 0$; quindi $\underline{f}$ è localmente invertibile, ossia è invertibile da un intorno U di $\underline{x}_0$

in $\mathbb{R}^N$ ad un intorno V di $\underline{y}_0$ in $\mathbb{R}^N$. Dunque per $\underline{y} \in V$ si ha $\underline{x} = \underline{f}^{-1}(\underline{y}) \in U$; ne segue

$$\underline{F}(U) = \left\{ (\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbb{R}^p : \ \underline{y} \in V, \ \ \underline{z} = \underline{g}(\underline{f}^{-1}(\underline{y})) \right\},$$

ossia $\underline{F}(U)$ è il grafico della funzione $\underline{G} = \underline{g} \circ \underline{f}^{-1}$, definita su $V \subseteq \mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}^{p-N}$.

Il piano N-dimensionale tangente in $\underline{F}(\underline{x}_0)$ a tale grafico è dato da

$$\underline{z} = \underline{z}_0 + D\underline{G}(\underline{y}_0)(\underline{y} - \underline{y}_0) = \underline{z}_0 + D\underline{g}(\underline{x}_0) \cdot D\underline{f}^{-1}(\underline{y}_0)(\underline{y} - \underline{y}_0) =$$

$$= \underline{z}_0 + D\underline{g}(\underline{x}_0) \cdot [D\underline{f}(\underline{x}_0)]^{-1}(\underline{y} - \underline{y}_0), \ \underline{y} \in \mathbb{R}^N.$$

Dunque si può scrivere equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ D\underline{g}(\underline{x}_0)[D\underline{f}(\underline{x}_0)]^{-1} \end{pmatrix} (\underline{y} - \underline{y}_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D\underline{f}(\underline{x}_0) \\ D\underline{g}(\underline{x}_0) \end{pmatrix} D\underline{f}(\underline{x}_0)^{-1}(\underline{y} - \underline{y}_0)$$

e posto $\underline{w} = D\underline{f}(\underline{x}_0)^{-1}(\underline{y} - \underline{y}_0)$,

$$\begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} + D\underline{F}(\underline{x}_0) \cdot \underline{w}, \quad \underline{w} \in \mathbb{R}^N.$$

Ciò prova che il piano tangente in $\underline{F}(\underline{x}_0)$ è generato dagli N vettori-colonna $D_1\underline{F}(\underline{x}_0), \dots, D_N\underline{F}(\underline{x}_0)$ di $D\underline{F}(\underline{x}_0)$ $\square$

Esempi (1) Sia $N=1$ e prendiamo $A =]a,b[$. Per un'applicazione $\underline{F} :]a,b[\to \mathbb{R}^p$, avere matrice Jacobiana di rango massimo significa che $\underline{F}'(t) \neq \underline{0}$. Se $\underline{F}'(t) \neq \underline{0}$ per ogni $t \in]a,b[$, l'applicazione $\underline{F}$ è detta curva regolare.
La retta tangente in $\underline{F}(t_0)$ alla curva è descritta da

$$\underline{x} = \underline{F}(t_0) + s\,\underline{F}'(t_0), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

(2) Sia $N=2$ e prendiamo un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ connesso.
Un'applicazione $\underline{F} : A \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 3$, con matrice Jacobiana di rango 2 in ogni punto si dice superficie regolare.
Il piano tangente in un punto $\underline{F}(u_0, v_0)$ alla superficie è descritto da

$$\underline{x} = \underline{F}(u_0,v_0) + s \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial u}(u_0,v_0) + t \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial v}(u_0,v_0), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

A noi interesseranno in questo corso i casi $N=1$, $p=2$ (curve piane) e $N=1$, oppure $N=2$, con $p=3$ (curve e superfici nello spazio).