ANALISI 2 | Lez 4/11/19



## Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Fissiamo $N \geq 1$ e andiamo a costruire dapprima la misura, e poi l'integrale di Lebesgue, che rimpiazzerà, anche per $N=1$, quello di Riemann. Le motivazioni che inducono a questa generalizzazione sono le seguenti:

1. Il passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

vale soltanto sotto le ipotesi, alquanto restrittive,

A limitato, $f_n \to f$ uniformemente in A per $n\to\infty$.

2. Nell'insieme delle funzioni Riemann-integrabili le quantità $\int_a^b |f(x)|\,dx$, $\left[\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$ non sono norme, cioè funzioni con le stesse proprietà della norma euclidea per vettori di $\mathbb{R}^N$: precisamente, il fatto che uno di quei due integrali sia nullo non implica che sia $f(x)\equiv 0$. Questa è una proprietà utile e importante dal punto di vista matematico.

3. Limitandosi allo spazio delle funzioni continue in $[a,b]$, dove i due integrali sopra scritti sono norme, tuttavia tali norme

non sono complete: ciò significa che se $\{f_n\} \subseteq C[a,b]$, e $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0$ per $n \to \infty$, non è detto che risulti $f \in C[a,b]$. Anche la completezza è una proprietà matematicamente importante.

Per costruire la misura N-dimensionale di Lebesgue, si parte dalla famiglia $\mathcal{P}_N$ dei parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$, che andiamo a definire. Ricordiamo che un intervallo $I$ di $\mathbb{R}$, limitato o no, è un insieme della forma

$$I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

ove $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $a < b$, e ciascuna delle due disuguaglianze può essere stretta ($<$) oppure no ($\leq$). La lunghezza di $I$ è

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \text{se } a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a \leq b, \\ +\infty & \text{se } a = -\infty \text{ oppure } b = +\infty. \end{cases}$$

**Definizione** Un parallelepipedo $P$ è un insieme della forma

$$P = I_1 \times \dots \times I_N = \prod_{j=1}^N I_j, \quad \text{con } I_j \text{ intervalli di } \mathbb{R}\ (j = 1, \dots, N).$$

È naturale definire il volume N-dimensionale (l'area, per $N=2$) di un parallelepipedo $P = \prod_{j=1}^N I_j \in \mathcal{P}_N$ come

$$V_N(P) = \prod_{j=1}^{N} \ell(I_j) ;$$

ma qui nasce un problema: cosa fare se un intervallo ha lunghezza infinita ed un altro intervallo ha lunghezza nulla? Ad esempio: che area assegnare a $\{1\} \times [0,\infty[$, visto che

$$V_2(\{1\} \times [0,\infty[) = 0 \cdot \infty \;?$$

Il senso comune ci dice che una semiretta ha area nulla, ed un piano ha volume nullo; quindi, ovvie ragioni di opportunità ci consigliano di stabilire la seguente

<u>Convenzione</u>: in tutta la teoria dell'integrazione si decide che

$$0 \cdot \infty = 0$$

Perciò:

<u>Definizione</u> Il volume N-dimensionale di un parallelepipedo $P = \prod_{j=1}^{N} I_j \in \mathcal{P}_N$ è $V_N(P) := \prod_{j=1}^{N} \ell(I_j)$; tale valore è 0 se c'è qualche fattore nullo, è $+\infty$ se c'è qualche fattore infinito ma nessun fattore nullo, è un numero reale positivo altrimenti.

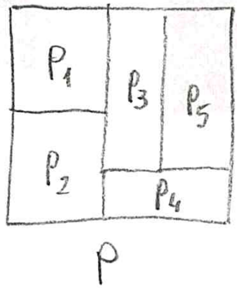
Il volume N-dimensionale è <u>additivo</u> sulla decomposizione di un fissato parallelepipedo P in unione finita di sotto-parallelepipedi fra loro <u>adiacenti</u>:

<u>Proposizione</u> Sia $P \in \mathcal{P}_N$ tale che

$$P = \bigcup_{j=1}^{m} P_j, \quad P_j \in \mathcal{P}_N, \quad \mathring{P}_j \cap \mathring{P}_i = \emptyset$$

(ove $\mathring{P}_j$ è la parte interna di $P_j$). Allora vale

$$v_N(P) = \sum_{j=1}^{m} v_N(P_j)$$




La dimostrazione nel caso $m=2$


è immediata (per definizione).
Il caso generale è più laborioso, benché semplice, e lo omettiamo.

Adesso vogliamo uscire dalla famiglia dei parallelepipedi $\mathcal{P}_N$ per attribuire una <u>misura N-dimensionale</u> ad insiemi più generali (ad esempio, a tutti gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}^N$).

Partiamo dalla nozione di <u>misura esterna</u> N-dimensionale:

<u>Definizione</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. La <u>misura esterna</u> di $E$ è il numero eventualmente infinito,

$$m_N^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} v_N(P_j) : P_j \in \mathcal{P}_N,\ P_j \text{ aperti},\ E \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} P_j \right\}.$$

Conseguenze immediate di questa definizione:

(i) $m_N^*(\emptyset) = m_N^*(\{\underline{x}\}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N$;

(ii) $m_N^*(E) \geq 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;

(iii) $E, F \subseteq \mathbb{R}^N,\ E \subseteq F \implies m_N^*(E) \leq m_N^*(F)$ [monotonia]

(iv) $m_N^*(E+\underline{v}) = m_N^*(E) \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N$ [invarianza per traslazioni]

ove $E+\underline{v} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^N : \ \underline{y} = \underline{x} + \underline{v},\ \underline{x} \in E\}$;

(v) $m_N^*(\mathbb{R}^N) = v_N(\mathbb{R}^N) = +\infty$.

<u>Osservazione</u> La definizione di $m_N^*(E)$ non cambia se si considerano, in luogo dei ricoprimenti di $E$ con parallelepipedi aperti, quelli costituiti da parallepipedi chiusi, o quelli formati da parallelepipedi qualsiasi. La verifica è facile ma pedante, e la omettiamo.

Un'altra importante proprietà della misura esterna è che essa è un'estensione propria del volume $N$-dimensionale:

<u>Lemma</u> Se $P \in \mathcal{P}_N$, allora

$$m_N^*(P) = v_N(P).$$

La dimostrazione ha una parte facile ($m_N^*(P) \leq v_N(P)$: basta considerare il ricoprimento di $P$ formato da $P$ stesso, e applicare la definizione) ed una parte difficile ($m_N^*(P) \geq v_N(P)$), che omettiamo. $\square$

Una proprietà importante della misura esterna, che però è anche il suo principale "difetto", è la numerabile subadditività:

<u>Proposizione</u> Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Posto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, si ha

$$m_N^*(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n).$$

Perché questa proprietà è un difetto? Perché sussiste così com'è senza il segno di uguaglianza, anche se gli $E_n$ sono <u>disgiunti</u> fra loro, nel qual caso ci saremmo aspettati l'uguaglianza

<u>dim.</u> (facile e astuta): se la serie a secondo membro è divergente, non c'è niente da provare. Altrimenti, avremo in particolare $m_N^*(E_n) < \infty$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Sia $\varepsilon > 0$: per definizione di $m_N^*(E_n)$, esiste un ricoprimento $\{P_{jn}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $E_n$, costituito da parallelepipedi, tale che

$$m_N^*(E_n) \leq \sum_{j=0}^{\infty} v_N(P_{jn}) < m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Allora la famiglia $\{P_{jn}\}_{j,n\in\mathbb{N}}$ ricopre $E$, e pertanto deve essere

$$m_N^*(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_N(P_{jn}) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left[m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n) + \varepsilon.$$

Poiché $\varepsilon$ è arbitrario, si ha la tesi. □

A causa del "difetto" sopra descritto, saremo costretti a selezionare una classe (peraltro vastissima) di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, vale a dire quella degli insiemi "misurabili", all'interno della quale sarà valida la proprietà di numerabile additività sulle successioni di insiemi misurabili disgiunti.

Introduciamo allora la famiglia $\mathcal{M}_N$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, all'interno della quale saranno valide tutte le proprietà che ci serviranno.

**Definizione** Sia $E$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Diciamo che $E$ è misurabile se per ogni "insieme test" $A \subseteq \mathbb{R}^N$ vale

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c)$$

(ove $E^c = \mathbb{R}^N \setminus E$ è il complementare di $E$).

In altre parole, $E$ è misurabile se e solo se esso "decompone bene" nel senso della misura, qualunque sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^N$. Si noti che, nella relazione che esprime la misurabilità, la disuguaglianza che conta è il $\geq$, perché l'altra è sempre vera in virtù della subadditività.

Osserviamo che:

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{M}_N$,

(ii) $E \in \mathcal{M}_N \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{M}_N$,

(iii) $m_N^*(E)=0 \implies E\in \mathcal{M}_N$: infatti, per ogni $A\subseteq\mathbb{R}^N$ si ha
$$m_N^*(A\cap E)\le m_N^*(E)=0,$$
da cui
$$m_N^*(A)\ge m_N^*(A\cap E^c)=m_N^*(A\cap E^c)+m_N^*(A\cap E).$$

La classe $\mathcal{M}_N$ è chiusa rispetto all'operazione insiemistica di unione, sia finita che numerabile.

<u>Proposizione</u> Se $E,F\in\mathcal{M}_N$, allora $E\cup F\in\mathcal{M}_N$.

<u>dim</u>. Sia $A\subseteq\mathbb{R}^N$ un insieme test. Poiché $E\in\mathcal{M}_N$,
$$m_N^*(A)=m_N^*(A\cap E)+m_N^*(A\cap E^c).$$
Poiché $F\in\mathcal{M}_N$, scelto $A\cap E^c$ come insieme test si ha
$$m_N^*(A\cap E^c)=m_N^*(A\cap E^c\cap F)+m_N^*(A\cap E^c\cap F^c)=$$
$$=m_N^*(A\cap E^c\cap F)+m_N^*(A\cap(E\cup F)^c);$$
dunque
$$m_N^*(A)=m_N^*(A\cap E)+m_N^*(A\cap E^c\cap F)+m_N^*(A\cap(E\cup F)^c).$$
D'altra parte
$$(A\cap E)\cup(A\cap E^c\cap F)=A\cap(E\cup F)$$
cosicché, per subadditività,
$$m_N^*(A)\ge m_N^*(A\cap(E\cup F))+m_N^*(A\cap(E\cup F)^c).$$
Dunque $E\cup F\in\mathcal{M}_N$. $\square$

**Corollario** Se $E, F \in \mathcal{M}_N$, allora $E \cap F, E \setminus F \in \mathcal{M}_N$.

dim. $E, F \in \mathcal{M}_N \Rightarrow E^c, F^c \in \mathcal{M}_N \Rightarrow (E \cap F)^c = E^c \cup F^c \in \mathcal{M}_N$

$\Rightarrow E \cap F \in \mathcal{M}_N$;

$E, F \in \mathcal{M}_N \Rightarrow E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}_N$. □

**Corollario** Se $E, F \in \mathcal{M}_N$ e $E \cap F = \emptyset$, allora
$$m_N^*(E \cup F) = m_N^*(E) + m_N^*(F).$$

dim Utilizziamo la misurabilità di $E$ prendendo come insieme test $E \cup F$:

$$m_N^*(E \cup F) = m_N^*((E \cup F) \cap E) + m_N^*((E \cup F) \cap E^c) = m_N^*(E) + m_N^*(F). \quad □$$

Dunque $m_N^*$ gode della proprietà di additività sulle unioni finite di insiemi misurabili disgiunti: questo è il primo passo per arrivare alla <u>numerabile additività</u>.

<u>Esercizi</u>

1. $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto $\Rightarrow m_N^*(A) > 0$.

2. $A, B \in \mathcal{M}_N$, $A \subseteq B$, $m_N^*(A) < \infty \Rightarrow m_N^*(B \setminus A) = m_N^*(B) - m_N^*(A)$.

3. $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $t > 0$, $E_t = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{t}\underline{x} \in E\} \Rightarrow m_N^*(E_t) = t^N m_N^*(E)$.

Per provare la numerabile additività della misura $m_N^*$ sugli insiemi misurabili disgiunti, occorre un lemma intermedio.

Lemma Siano $E_1, \dots, E_m$ insiemi misurabili disgiunti. Allora, per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ vale

$$m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{m} E_h\right) = \sum_{h=1}^{m} m_N^*(A \cap E_h).$$

Questo lemma si prova facilmente per induzione su $m$, utilizzando nel passo induttivo la definizione di misurabilità di $E_{m+1}$, applicata all'insieme test $A \cap \bigcup_{h=1}^{m+1} E_h$. Il risultato di questo lemma è già, a ben vedere, un enunciato di finita additività sui misurabili disgiunti: per vederlo basta scegliere $A = \mathbb{R}^N$.

Proposizione Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili. Allora l'insieme $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ è misurabile.

dim. Anzitutto, scriviamo $E$ come unione numerabile di insiemi misurabili disgiunti: a questo scopo, basta porre

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{h=0}^{n} E_h.$$

Gli $F_n$ sono misurabili e disgiunti (per costruzione), ed è facile vedere che $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E$.

Ciò premesso, sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme test. Per ogni $p \in \mathbb{N}$, poichè $\bigcup_{h=0}^{p} F_h$ è misurabile, si ha

$$m_N^*(A) = m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=0}^{p} F_h\right) + m_N^*\left(A \cap \left(\bigcup_{h=0}^{p} F_h\right)^c\right).$$

Dunque per il lemma precedente

$$m_N^*(A) \geq m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{p} F_h\right) + m_N^*\left(A \cap \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} F_h\right)^c\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{p} m_N^*(A \cap F_h) + m_N^*(A \cap E^c), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Se $p \to \infty$ ricaviamo

$$m_N^*(A) \geq \sum_{h=0}^{\infty} m_N^*(A \cap F_h) + m_N^*(A \cap E^c),$$

e per numerabile subadditività

$$m_N^*(A) \geq m_N^*\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} (A \cap F_h)\right) + m_N^*(A \cap E^c) =$$

$$= m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=0}^{\infty} F_h\right) + m_N^*(A \cap E^c) =$$

$$= m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c).$$

Ciò mostra che $E \in \mathcal{M}_N$. □

[<u>Corollario</u> Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili. Allora $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ è misurabile. [Infatti: $\left[\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right]^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n^c \in \mathcal{M}_N$.]]

**Proposizione** (*numerabile additività*). Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili disgiunti. Allora

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n).$$

*dim*. Per numerabile subadditività

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n).$$

D'altra parte, fissato $m\in\mathbb{N}$, il lemma intermedio citato sopra, con $A=\mathbb{R}^N$, ci dice che

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \geq m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{m} E_n\right) = \sum_{n=0}^{m} m_N^*(E_n),$$

e per $m\to\infty$

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n),$$

da cui la tesi. □

Tiriamo le somme: la classe $\mathcal{M}_N$ degli insiemi misurabili verifica:

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{M}_N$;

(ii) $E\in\mathcal{M}_N \Rightarrow E^c\in\mathcal{M}_N$

(iii) $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N \Longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_N$

Una famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ che gode di queste tre proprietà è detta *σ-algebra*, o *tribù*.