La classe $\mathcal{M}_N$ non è l'unico esempio di tribù di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Sono tribù anche

$\mathcal{E}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^N\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\emptyset, E, E^c, \mathbb{R}^N\}$ (con $E \subset \mathbb{R}^N$ non vuoto),

$\mathcal{E}_3 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (la classe di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$).

Quanto è grande la tribù $\mathcal{M}_N$? Con un po' di fatica si dimostra che:

- ogni parallelepipedo è misurabile, dunque $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{M}_N$;
- ogni aperto e ogni chiuso di $\mathbb{R}^N$ è misurabile, dunque $\mathcal{M}_N$ contiene tutti gli aperti di $\mathbb{R}^N$;
- esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ non misurabili, e dunque $\mathcal{M}_N \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Si verifica facilmente che l'intersezione di una collezione arbitraria di tribù è una tribù. Se consideriamo la collezione di tutte le tribù che contengono tutti gli aperti di $\mathbb{R}^N$ (fra queste c'è $\mathcal{M}_N$), l'intersezione di tutte queste tribù è la tribù Boreliana $\mathcal{B}_N$ (dal matematico francese Émile Borel): $\mathcal{B}_N$ è dunque la minima tribù che contiene tutti gli aperti di $\mathbb{R}^N$. Risulta $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{M}_N$, perchè esistono insiemi misurabili non boreliani (cioè non appartenenti a $\mathcal{B}_N$).

<u>Definizione</u> La <u>misura di Lebesgue N-dimensionale</u> m_N è la funzione m_N^* ristretta a $\mathcal{M}_N$: cioè

$$m_N : \mathcal{M}_N \to [0,\infty[\,, \quad m_N(E) = m_N^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}_N .$$

Si ha in particolare

(i) $m_N(\phi) = 0$,

(ii) $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$, E_n disgiunti $\Rightarrow m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_N(E_n)$.

Inoltre

$$A, B \in \mathcal{M}_N, \ A \subseteq B \implies m_N(A) \leq m_N(B)$$

[infatti $m_N(A) = m_N^*(A) \leq m_N^*(B) = m_N(B)$.]

Vale anche

(iii) $E \in \mathcal{M}_N$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^N \implies m_N(E + \underline{v}) = m_N(E)$.

<u>Esempio</u> (<u>insieme di Cantor</u>) Sia $\alpha \in]0, \frac{1}{3}]$ e poniamo

$$C_\alpha := [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{jn} \,,$$

ove $I_{10} =]\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}[$, I_{11} e I_{21} sono i due intervalli aperti di ampiezza α^2 centrati nei punti medi dei due intervalli di $C_\alpha \setminus I_{10}$, I_{12}, I_{22}, I_{32} e I_{42} sono i 4 intervalli aperti centrati nei punti medi dei 4 intervalli di $C_\alpha \setminus \bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{jn}$, e così via: al passo m-simo, $C_\alpha \setminus \bigcup_{n=0}^{m-1} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{jn}$ è formato da 2^m intervalli, e si tolgono le 2^m parti centrali aperte, $I_{1m}, \dots, I_{2^m m}$, di ampiezza α^{m+1}, centrate nei punti medi di tali intervalli.

L'insieme residuo, C_α, è chiuso (perchè gli abbiamo sottratto un'infinità numerabile di aperti), dunque è misurabile. Si ha

$$m_1(C_\alpha) = m_1\left([0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{jn}\right) = m_1([0,1]) - m_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{jn}\right).$$

Poichè gli I_{jn} sono tutti disgiunti,

$$m_1(C_\alpha) = 1 - m_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{jn}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} m_1(I_{jn}) =$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \alpha^{n+1} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \alpha^{n+1} = 1 - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (2\alpha)^n =$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{1-2\alpha} = \frac{1-3\alpha}{1-2\alpha}.$$

Dunque, se $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ si ha $m_1(C_\alpha) > 0$, se $\alpha = \frac{1}{3}$ si ha $m_1(C_\alpha) = 0$.

L'insieme C_α non ha punti interni nè punti isolati. Inoltre, se $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ la funzione indicatrice $I_{C_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_\alpha \\ 0 & \text{se } x \notin C_\alpha \end{cases}$

<u>non è</u> Riemann-integrabile. Infatti, per ogni suddivisione σ di $[0,1]$ con nodi $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_p = 1$, posto $I_h = [x_{h-1}, x_h]$

si ha:

$$s(I_{C_\alpha},\sigma)=\sum_{h=1}^{p} \inf_{I_h} I_{C_\alpha}\cdot \ell(I_h)=\sum_{h=1}^{p} 0=0,$$

in quanto ogni intervallo I_h contiene punti di $[0,1]\setminus C_\alpha$.

Quindi

$$I^-(I_{C_\alpha})=0.$$

D'altra parte, per ogni suddivisione σ, indicati con $I_{h_1},\dots,I_{h_r}$ gli intervalli della suddivisione che contengono punti di C_α (cosicché $C_\alpha\subseteq \bigcup_{i=1}^{r} I_{h_i}$), si ha

$$S(I_{C_\alpha},\sigma)=\sum_{h=1}^{p} \sup_{I_h} I_{C_\alpha}\cdot \ell(I_h)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r} 1\cdot \ell(I_{h_i})=\sum_{i=1}^{r} m_1(I_{h_i})=$$

$$=m_1\left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{h_i}\right)\geq m_1(C_\alpha)=\frac{1-3\alpha}{1-2\alpha},$$

e dunque

$$I^+(I_{C_\alpha})\geq \frac{1-3\alpha}{1-2\alpha}.$$

Essendo $I^+(I_{C_\alpha})>I^-(I_{C_\alpha})$, la funzione I_{C_α} non è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$.

Esercizi

1. Siano $A, B \in \mathcal{M}_N$, con $A \subseteq B$ e $m_N(A) < \infty$. Provare che
$$m_N(B \setminus A) = m_N(B) - m_N(A).$$

2. Mostrare che $E = \{x \in]0, \frac{1}{\pi}] : \sin \frac{1}{x} > 0\}$ è misurabile e calcolare $m_1(E)$.

3. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ la successione delle cifre decimali di x; si scelga lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità (ad esempio: $1 = 0.\overline{9}$, $0.3 = 0.2\overline{9}$, eccetera). Posto
$$E = \{x \in [0,1] : \alpha_n \neq 9 \ \forall n \in \mathbb{N}^+\},$$
provare che E è misurabile e calcolare $m_1(E)$.