ANALISI 2 | la 11/11/19

1. Trovare i punti della superficie $\{z^2 - xy - 1 = 0\}$ più vicini all'origine.

2. L'equazione $y^5 + \ln \frac{x+y}{2} - xy = 0$ è verificata in $(1,1)$.. Provare che in un intorno di tale punto tale luogo è grafico di una funzione implicita g. Scrivere il polinomio di Taylor in 1 di grado 2 per g e per g^{-1}.

3. Analizzare la convergenza delle successioni di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^{\infty} e^{-nxy^2} dy \,, \qquad g_n(x) = x^n - x^{2n} \,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

1. Dobbiamo trovare il minimo di

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

sul vincolo S. Possiamo più facilmente analizzare la funzione $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Notiamo che $\sup_S F = +\infty$ perchè, scelto $(x,y,z) = (n, n, \sqrt{n^2+1}) \in Z$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} F(n,n,\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} (3n^2+1) = +\infty.$$

Consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-1);$$

si ha $\nabla L = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} 2x-\lambda y=0 \\ 2y-\lambda x=0 \\ 2z+2\lambda z=0 \\ z^2=1+xy; \end{cases}$$

dalle prime 2 equazioni segue $x = \frac{\lambda}{2}y = \frac{\lambda^2}{4}x$; dunque $x=0$ oppure $\lambda^2=4$. Nel 1° caso, la 3ª equazione dà $y=0$ e la 4ª dà $z=\pm1$: otteniamo i punti stazionari vincolati

$$(0,0,\pm1), \text{ con } F(0,0,\pm1)=1.$$

Nel 2° caso, si ha $\lambda=\pm2$; per $\lambda=2$ segue $x=y$, $z=0$ e dunque $x^2=xy=-1$, assurdo. Per $\lambda=-2$ segue $x=-y$, $z=0$ e $x^2=-xy=1$, ossia $x=\pm1$ e $y=\mp1$. Si trovano così i punti stazionari vincolati

$$\pm(1,-1,0), \text{ con } F(\pm(1,-1,0))=2.$$

Perciò

$$\min_S F = F(0,0,\pm1)=1,$$

e dunque

$$\min_S f = f(0,0,\pm1)=1.$$

2. Posto $F(x,y) = y^5 + \ln \frac{x+y}{2} - xy$, si ha $F(1,1)=0$. Inoltre

$$F_x(x,y) = \frac{1}{x+y} - y, \quad F_y(x,y) = 5y^4 + \frac{1}{x+y} - x,$$

da cui

$$F_x(1,1) = -\frac{1}{2}, \quad F_y(1,1) = \frac{9}{2}.$$

Quindi il teorema del Dini ci garantisce che in un intorno U di $(1,1)$ la curva di livello 0 di F è il grafico di una funzione invertibile g. Possiamo supporre che g sia funzione di y:

$$(x,y) \in U,\ F(x,y)=0 \iff x = g(y).$$

Si ha $g(1)=1$; poi,

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y),y)}{F_x(g(y),y)}, \quad g'(1)=9$$

e

$$g''(y) = -\frac{(F_{yx}\, g' + F_{yy})F_x - F_y(F_{xx}\, g' + F_{xy})}{F_x^2};$$

Essendo

$$F_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}, \quad F_{xy}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} - 1, \quad F_{yy}(x,y) = 20y^3 - \frac{1}{(x+y)^2}$$

troviamo

$$F_{xx}(1,1) = -\frac{1}{4}, \quad F_{xy}(1,1) = -\frac{3}{4}, \quad F_{yy}(1,1) = \frac{79}{4}.$$

131

Dunque

$$g''(1) = -\frac{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)9 + \frac{79}{4}\right]\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)9 - \frac{3}{4}\right]}{\frac{1}{4}} = -28,$$

e pertanto il polinomio di Taylor di g è

$$p(y) = 1 + 9(y-1) - 14(y-1)^2.$$

Per quanto riguarda g^{-1}, che per comodità indichiamo con h, si ha $y = h(x)$, $h(1) = 1$, e poi

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_y(x, h(x))}, \qquad h'(1) = \frac{1}{9};$$

$$h''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}h')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}h')}{F_y^2},$$

$$h''(1) = -\frac{\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}\right)\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{79}{4}\cdot\frac{1}{9}\right)}{\frac{81}{4}} = -\frac{107}{729}.$$

Quindi il polinomio di Taylor di h è

$$1 + \frac{1}{9}(x-1) - \frac{107}{1458}(x-1)^2.$$

3. Per la prima successione, posto $t = nxy^2$, possiamo scrivere

$$f_n(x) = \int_0^\infty e^{-nxy^2}\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\,dt \cdot \frac{1}{\sqrt{nx}} =: \frac{c}{\sqrt{nx}}.$$

dunque

$$f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \le 0, \\ \dfrac{c}{\sqrt{nx}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x > 0.$$

La convergenza sarà uniforme in ogni semiretta $[\delta, \infty[$ con $\delta > 0$, dato che

$$\sup_{x\geq\delta} f_n(x) = \frac{c}{\sqrt{n\delta}} \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Per la 2ª successione, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} [x^n - x^{2n}] = \begin{cases} -\infty & \text{se } |x| > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x \le 1. \end{cases}$$

Vediamo se c'è convergenza uniforme in $[-1+\delta, 1]$: dobbiamo valutare

$$\sup_{-1+\delta \le x \le 1} |x^n - x^{2n}|.$$

La derivata è $\quad n x^{n-1} - 2n x^{2n-1} = n x^{n-1} [1 - 2x^n]$, essa si annulla per $x = 0$ e per $x = 2^{-1/n}$; la funzione f_n vale 0 per $x = 0$ e vale $\frac{1}{4}$ per $x = 2^{-1/n}$. Quindi

La convergenza non è uniforme in $[-1+\delta, 1]$.

Tuttavia, essendo

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{n}} = 1,$$

esiste $n_\delta \in \mathbb{N}$ per il quale

$$2^{-\frac{1}{n}} > 1-\delta \quad \forall n \geq n_\delta,$$

e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1-\delta} |x^n - x^{2n}| = \lim_{n\to\infty} \left((1-\delta)^n - (1-\delta)^{2n}\right) = 0;$$

ne segue che vi è convergenza uniforme in $[-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in]0,1[$.

PROPRIETÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE

La misura m_N ha un buon comportamento sulle successioni monotone (rispetto all'inclusione) di insiemi misurabili.

Proposizione Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili.

(i) Se $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

(ii) Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ allora

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } m_N(E_n) = +\infty \ \forall n\in\mathbb{N} \\ m_N\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) & \text{se } \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tale che } m_N(E_{n_0}) < \infty. \end{cases}$$

dim. (i) Posto $F_0 = E_0$ e $F_{n+1} = E_{n+1}\setminus E_n$, per ogni $n\in\mathbb{N}$, gli insiemi F_n sono misurabili e disgiunti. Inoltre

$$\bigcup_{h=0}^{n} F_h = E_n \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad \bigcup_{h=0}^{\infty} F_h = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Per numerabile additività si ottiene (i):

$$m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = m_N\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} F_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} m_N(F_h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=0}^{n} m_N(F_h) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m_N\left(\bigcup_{h=0}^{n} F_h\right) = \lim_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

(ii) Se $m_N(E_n) = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, è chiaro che
$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = +\infty\,;$$
si noti che in questo caso può capitare che $m_N\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) < \infty$: ad esempio, ciò accade se $E_n = [n, +\infty[\subset \mathbb{R}$, poiché
$$m_1(E_n) = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad m_1\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) = m_1(\emptyset) = 0.$$
Se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m_N(E_{n_0}) < \infty$, allora $m_N(E_n) < \infty$ per ogni $n \geq n_0$. Poniamo $G_n = E_{n_0} \setminus E_n$ $\forall n > n_0$: si ha
$$G_n \subseteq G_{n+1} \quad \forall n > n_0, \qquad \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (E_{n_0} \setminus E_n) = E_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right).$$
Applicando (i) a $\{G_n\}_{n \geq n_0}$, si ha
$$\lim_{n\to\infty} m_N(G_n) = m_N\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} G_n\right) = m_N\left(E_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right)\right),$$
cioè
$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_{n_0} \setminus E_n) = m_N\left(E_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right)\right).$$
Essendo $m_N(E_{n_0}) < \infty$, ciò significa
$$m_N(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N(E_{n_0}) - m_N\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right),$$
ovvero
$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right) = m_N\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right),$$
e ciò prova (ii). □

Ad ulteriore conferma che la definizione di insieme misurabile è appropriata e funziona bene, diamo una caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in termini della loro "vicinanza" a insiemi aperti o insiemi chiusi.

<u>Proposizione</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Sono fatti equivalenti:

(i) $E \in \mathcal{M}_N$;

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m_N^*(A \setminus E) < \varepsilon$;

(iii) esiste $B \in \mathcal{B}_N$ tale che $B \supseteq E$ e $m_N(B \setminus E) = 0$;

(iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$;

(v) esiste $D \in \mathcal{B}_N$ tale che $D \subseteq E$ e $m_N(E \setminus D) = 0$.

<u>dim.</u> Proveremo che (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) verranno di conseguenza.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $E \in \mathcal{M}_N$. Abbiamo 2 casi: $m_N(E) < \infty$, oppure $m_N(E) = \infty$. Se $m_N(E) < \infty$, per definizione di m_N^*, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento di E formato da parallelepipedi P_n, tale che $\sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) < m_N(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Se i P_n non sono tutti aperti, possiamo dilatarli appena appena, rendendoli aperti, e ottenendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) < m_N(E) + \varepsilon .$$

Posto $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, A è aperto e contiene E. Per additività e numerabile subadditività,

$$m_N(A \setminus E) = m_N(A) - m_N(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_N(P_n) - m_N(E) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) - m_N(E) < \varepsilon,$$

cosicché vale (ii) quando $m_N(E) < \infty$.

Se $m_N(E) = \infty$, scriviamo

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (E \cap Q_n),$$

ove i Q_n sono parallelepipedi adiacenti la cui unione è $\mathbb{R}^N$.

Poiché $m_N(E \cap Q_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per quanto già provato, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A_n \supseteq E \cap Q_n$ tale che

$$m_N(A_n \setminus (E \cap Q_n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Consideriamo l'aperto $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$: esso contiene E e si ha

$$m_N(A \setminus E) = m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (E \cap Q_k)\right) \leq m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus (E \cap Q_n))\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_N(A_n \setminus (E \cap Q_n)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon,$$

e ciò prova (ii) quando $m_N(E) = \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sia $\varepsilon = \frac{1}{n}$: per ipotesi vi è un aperto $A_n \supseteq E$ tale che $m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Se definiamo $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, risulta $B \in \mathcal{B}_N$, $B \supseteq E$, e $m_N^*(B \setminus E) = m_N^*(A \setminus E) < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque si ha $m_N^*(B \setminus E) = 0$;

in particolare $B \setminus E \in \mathcal{M}_N$ e $m_N(B \setminus E) = 0$. 138

iii) $\Rightarrow$ (i) Per ipotesi vi è $B \in \mathcal{B}_N$ tale che $B \supseteq E$ e $m_N(B \setminus E) = 0$. Dato che $B \setminus E$ e B appartengono a $\mathcal{M}_N$, si ha

$$E = B \setminus (B \setminus E) \in \mathcal{M}_N.$$

i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) Si applicano tutte le implicazioni precedenti a E^c, notando che se A è un aperto $\supseteq E^c$, allora A^c è un chiuso contenuto in E, e che

$$m_N(A \setminus E^c) = m_N(A \cap E) = m_N(E \setminus A^c). \quad \square$$

Funzioni misurabili

Dopo aver introdotto gli insiemi sopra i quali fare gli integrali (gli insiemi misurabili), è il momento di introdurre le funzioni da integrare (le funzioni misurabili).

Considereremo funzioni $f : D \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, ove $D \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile. Perchè funzioni a valori in $[-\infty, +\infty]$ e non solo a valori in $\mathbb{R}$? Perchè è più comodo. Ricordiamo che è sempre in vigore la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Anzitutto, una facile proposizione che riguarda gli insiemi

$$\{f > \alpha\} := \{x \in D : f(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Proposizione. Sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, ove $D \in \mathcal{M}_N$. I seguenti quattro enunciati sono fra loro equivalenti:

(i) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

dim (i) $\Rightarrow$ (ii) Si ha $\{f \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}_N$, perchè intersezione di insiemi misurabili.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si ha $\{f < \alpha\} = \{f \geq \alpha\}^c \in \mathcal{M}_N$ perchè complementare di un insieme misurabile. (iii) $\Rightarrow$ (iv) Si ha $\{f \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < \alpha + \frac{1}{n}\}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Si ha $\{f>\alpha\} = \{f \le \alpha\}^c$. ∎

<u>Definizione</u> Sia $D \in \mathcal{M}_N$. Diciamo che una funzione $f: D \to \bar{\mathbb{R}}$ è <u>misurabile</u> se vale una (e quindi ciascuna) delle quattro condizioni della proposizione precedente.

<u>Esempi</u>. (1) Se $D \in \mathcal{M}_N$, la <u>funzione indicatrice</u> di D è

$$I_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \in D^c \end{cases}$$

è misurabile su $\mathbb{R}^N$ perchè

$$\{I_D > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1 \\ D & \text{se } 0 \le \alpha < 1 \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0 \end{cases};$$

quindi $\{I_D > \alpha\} \in \mathcal{M}_N \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(2) Una <u>funzione semplice</u> $\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione che assume solo un numero finito di valori su insiemi misurabili. Quindi

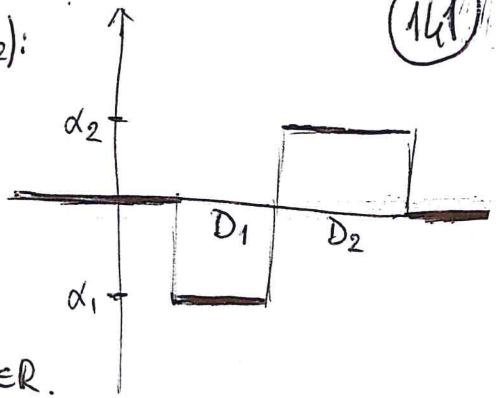
$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}(x),$$

ove $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$ e $D_j = \varphi^{-1}(\{\alpha_j\}) = \{\varphi = \alpha_j\} \in \mathcal{M}_N$. Ogni funzione semplice è misurabile: facciamo la verifica solo nel caso di una funzione della forma

$$\varphi(x) = \alpha_1 I_{D_1}(x) + \alpha_2 I_{D_2}(x), \quad \text{ove } D_1 = \{\varphi = \alpha_1\} \text{ e } D_2 = \{\varphi = \alpha_2\}.$$

Si ha allora (se, ad esempio, $\alpha_1<0<\alpha_2$):

$$\{\varphi>\alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \alpha_2 \\ D_2 & \text{se } \alpha_2 > \alpha \geq 0 \\ D_1^c & \text{se } 0 > \alpha \geq \alpha_1 \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha_1 > \alpha \, ; \end{cases}$$



quindi $\{\varphi>\alpha\} \in \mathcal{M}_N$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) Le funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue, ove A è un aperto, sono misurabili: infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{f>\alpha\} = f^{-1}(]\alpha,\infty[)$$

è la controimmagine di un aperto di $\mathbb{R}$; essendo f continua essa è un aperto. Poiché gli aperti sono misurabili, $\{f>\alpha\} \in \mathcal{M}_N$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Se $N=1$, le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, sono misurabili: infatti $\{f>\alpha\}$ è un intervallo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e gli intervalli (cioè i "parallelepipedi" uni-dimensionali) sono misurabili.

<u>Proposizione</u> Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \max\lim_{n\to\infty} f_n, \quad \min\lim_{n\to\infty} f_n$$

sono funzioni misurabili su D.

<u>dim</u>. Ricordiamo che $\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right](x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x)\}$, $\left[\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right](x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x)\}$,

e che

$$\left[\max\lim_{n\to\infty} f_n\right](x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m(x), \quad \left[\min\lim_{n\to\infty} f_n\right](x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m(x).$$

Poiché

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < \alpha\} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R},$$

le funzioni $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ e $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sono misurabili. Gli ultimi due casi seguono di conseguenza: per ogni $n\in\mathbb{N}$, $g_n(x) := \sup_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile; ne segue $\inf_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ misurabile. Similmente, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $h_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile, da cui $\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x)$ è misurabile. □

<u>Corollario</u>. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili su D ed esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x\in D$, allora f è misurabile.

<u>dim</u>. Infatti, quando il limite esiste, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \max\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. □

Vi è un'altra caratterizzazione, molto comoda.

<u>Proposizione</u>. Sia $D\in\mathcal{M}_N$ e sia $f: D\to\overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a f puntualmente in D.

<u>dim</u>. ($\Leftarrow$) è il corollario precedente. Il viceversa, la prossima volta.