Stiamo dimostrando la proposizione

[$f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se vi è una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici tali che $\varphi_n(x) \to f(x)$ puntualmente in D.

($\Rightarrow$) Per ogni $x \in D$ poniamo:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{su } \{x \in D : f(x) > n\}, \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{su } \{x \in D : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n}\}, \ k = 1, 2, \dots, n2^n, \\ 0 & \text{su } \{x \in D : f(x) = 0\} \\ \frac{k}{2^n} & \text{su } \{x \in D : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}, \ k = 0, -1, -2, \dots, -n2^n+1, \\ -n & \text{su } \{x \in D : f(x) < -n\}. \end{cases}$$

Infine poniamo $\varphi_n(x) = 0$ su D^c. Allora $\varphi_n \in S(\mathbb{R}^N)$, perché assume solo un numero finito di valori su insiemi misurabili: ad esempio

$$\{x \in D : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n}\} = \{f \leq \frac{k}{2^n}\} \cap \{f > \frac{k-1}{2^n}\},$$

$$\{x \in D : f(x) = 0\} = \{f \geq 0\} \cap \{f \leq 0\}.$$

Inoltre, per costruzione, $\varphi_n(x) \to f(x)$ puntualmente in D. Si noti che, in più, $|\varphi_n| \leq |f|$ e, se $f \geq 0$, $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$. Infine, se f è limitata, allora $\varphi_n \to f$ uniformemente in D.

[<u>Proposizione</u> Se f e g sono misurabili su D, allora lo sono anche $f+g$, fg, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $\frac{f}{g}$ (sul proprio dominio di definizione).

Si vede che $f+g$ è definita solo sui punti di D dove non si ha simultaneamente $f(x)=-g(x)=\pm\infty$, mentre fg è sempre ben definita in virtù della convenzione $0\cdot\infty=0$; ricordiamo poi che

$$f\vee g=\max\{f,g\}, \qquad f\wedge g=\min\{f,g\}.$$

Infine, f/g è ben definita nei punti di D dove $g\neq 0$, dove $g=0$ ma $f\neq 0$ (con $\frac{f}{g}=\pm\infty$) e dove non si ha simultaneamente $|f|=|g|=+\infty$.

La dimostrazione di questo risultato è un'applicazione standard della proposizione precedente. $\square$

ESERCIZI

1. Per ogni $E, F\in\mathcal{M}_N$ si provi che
$$m_N(E)+m_N(F)=m_N(E\cap F)+m_N(E\cup F).$$

2. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e non negativa. Posto
$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\},$$
si provi che T è misurabile e che $m_2(T)=\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Si provi che se f è misurabile allora $\{f=\alpha\}$ è misurabile per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, ma che il viceversa è falso.

4. Se f è misurabile, si mostri che $\{f=+\infty\}$ e $\{f=-\infty\}$ sono misurabili.

5. Siano $f,g:D\to\overline{\mathbb{R}}$ misurabili; si provi che $\{f=g\}$ è misurabile.

6. Sia f misurabile su D. Se $g:D\to\overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\{x\in D: f(x)\neq g(x)\}$ ha misura nulla, allora è misurabile.

L'integrale di Lebesgue

Per prima cosa definiamo l'integrale per funzioni semplici, anzi, per le funzioni semplici che si annullano al di fuori di un insieme di misura finita. Sia dunque

$$S_0 = \{\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : \varphi \text{ è semplice, ed } \exists E \in \mathcal{M}_N : m_N(E) < \infty,\ \varphi \equiv 0 \text{ su } E^c\}.$$

Definizione Sia

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}(x),$$

ove $\alpha_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $D_j = \varphi^{-1}(\alpha_j) \in \mathcal{M}_N$, con $m_N\left(\bigcup_{j=1}^{k} D_j\right) < \infty$.

L'integrale di φ su $\mathbb{R}^N$ è il numero reale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j m_N(D_j).$$

Le proprietà dell'integrale nella classe S_0 sono le seguenti:

Proposizione Siano $\varphi, \psi \in S_0$. Allora:

(i) se $\varphi \le \psi$ in $\mathbb{R}^N$, allora $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\,dx$ (monotonia)

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\,dx \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (linearità). □

Passiamo ora a definire l'integrale per funzioni misurabili.
Si comincia con le misurabili non negative, e si estende in seguito la definizione a quelle di segno opposto o di segno variabile.
Come si vedrà, sarà essenziale l'aver già definito l'integrale per funzioni semplici (e nulle al di fuori di un insieme di misura finita.

<u>Definizione [integrale di Lebesgue]</u>. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile.

(i) Se $f \geq 0$, l'<u>integrale di f su $\mathbb{R}^N$</u> (secondo Lebesgue) è il numero non negativo, eventualmente infinito,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx : \ \varphi \in S_0, \quad 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

(ii) Se $f \geq 0$ e $D \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile, l'<u>integrale di f su D</u> è il numero non negativo, eventualmente infinito,

$$\int_D f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, I_D(x)\,dx \quad (\text{già definito in (i)}).$$

(iii) Se $f \le 0$, oppure f cambia segno, poniamo

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\};$$

diciamo che f è <u>integrabile su $\mathbb{R}^N$</u> se almeno uno fra $\int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx$ è finito; in tal caso poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx \quad (\text{già definiti in (i)})$$

se l'integrale così definito è finito, diciamo che f è <u>sommabile su $\mathbb{R}^N$</u>.

iv) Se $f \le 0$, oppure f cambia segno, e $D \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile, diciamo che f è <u>integrabile su D</u> se almeno uno fra $\int_D f^+(x)\,dx$ e $\int_D f^-(x)\,dx$ è finito; in tal caso poniamo

$$\int_D f(x)\,dx = \int_D f^+(x)\,dx - \int_D f^-(x)\,dx \quad (\text{già definiti in (ii)}),$$

e se l'integrale così definito è finito, diciamo che f è <u>sommabile su D</u>.

<u>Osservazioni</u> (1) Se f ha segno costante, gli integrali

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx, \quad \int_D f(x)\,dx$$

sono sempre ben definiti, ma possono valere $+\infty$ o $-\infty$.

2) L'integrale è <u>monotono</u>, ossia se f, g sono integrabili su D e $f \le g$

allora

$$\int_D f(x)\,dx \leq \int_D g(x)\,dx .$$

Infatti, se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ciò segue dalla definizione. Se f e g cambiano segno, da $f \leq g$ segue comunque $f^+ \leq g^+$ e $f^- \geq g^-$, e di conseguenza

$$\int_D f(x)\,dx = \int_D f^+(x)\,dx - \int_D f^-(x)\,dx \leq \int_D g^+(x)\,dx - \int_D g^-(x)\,dx = \int_D g(x)\,dx .$$

(3) In particolare, se f è integrabile su D

$$\left| \int_D f(x)\,dx \right| \leq \int_D |f(x)|\,dx .$$

(4) Se f è integrabile su D, e se E è misurabile e contenuto in D, allora f è integrabile su E. Infatti $f^+ I_E \leq f^+ I_D$ e $f^- I_E \leq f^- I_D$; poiché uno almeno fra $\int_{\mathbb{R}^N} f^+(x) I_D(x)\,dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x) I_D(x)\,dx$ è finito, lo stesso vale per gli integrali di $f^+ I_E$ e $f^- I_E$. Se, in particolare, $f \geq 0$ e si ha $E \subseteq D$, allora

$$0 \leq \int_E f(x)\,dx \leq \int_D f(x)\,dx .$$

<u>Proposizione</u> Sia $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, con i D_n misurabili e disgiunti. Se f è integrabile su D, allora

$$\int_D f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} f(x)\,dx .$$

<u>dim</u> omessa (è simile a quella della numerabile additività di m_N). □